Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2021.035

ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM TRONG MÔ HÌNH TRÒ CHƠI CÔNG BẰNG

Lâm Hoàng Chương[1*], Trần Phước Lộc[1], La Mỹ Kim[2] và Dương Thị Tuyền[1]
[1]*Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*
[2]*Lớp Toán ứng dụng khóa 43, Trường Đại học Cần Thơ*
[*]*Người chịu trách nhiệm về bài viết: Lâm Hoàng Chương (email: lhchuong@ctu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 30/08/2020
Ngày nhận bài sửa: 05/10/2020
Ngày duyệt đăng: 28/04/2021

Title:
Central limit theorem in the fair game model

Từ khóa:
Bước đi ngẫu nhiên, định lý giới hạn trung tâm, mô hình trò chơi công bằng, phương pháp moment, toán tử Markov

Keywords:
Central limit theorem, fair game model, Markov operator, method of moment, random walk

ABSTRACT

The aim of this paper is to study a fair game model, which is described by a random walk in one dimension. The method of moments, as in Depauw and Derrien (2009) and Lam (2014), is applied to prove that this process converges in distribution to a normal law. Especially, the moment of a random walk will be computed in details. This is an extension of Lâm Hoàng Chương and Dương Thị Bé Ba (2017).

TÓM TẮT

Mục tiêu chính của bài báo là nghiên cứu mô hình trò chơi công bằng được mô tả bởi bước đi ngẫu nhiên trong không gian một chiều. Sử dụng phương pháp moment như trong các bài báo của Depauw and Derrien (2009) và Lam (2014) để chứng minh quá trình đang xét hội tụ theo phân phối đến phân phối chuẩn. Đặc biệt, các moment của bước đi ngẫu nhiên đều được tính một cách chi tiết. Đây là một mở rộng của bài báo của Lâm Hoàng Chương và Dương Thị Bé Ba (2017).

1. GIỚI THIỆU

Bước đi ngẫu nhiên trong không gian một chiều là một chuyển động ngẫu nhiên cơ bản đã và đang được nhiều nhà toán học quan tâm. Nó không chỉ có ảnh hưởng đến lý thuyết xác suất mà còn có nhiều ứng dụng được áp dụng trong thực tế. Bạn đọc có thể tham khảo thêm ở các tài liệu Norris (1998), Ross (2010) và Zeitouni (2006). Trong phạm vi bài báo này chúng ta nghiên cứu mô hình của một trò chơi của hai đối thủ A và B mà có xác suất thắng, hòa và thua là như nhau. Đây còn được là mô hình trò chơi công bằng được mô tả về mặt toán học như sau: Ông A có số vốn ban đầu là x đồng và sau mỗi ván chơi thì

- thắng 1 đồng với xác suất 1/3,
- hòa vốn với xác suất 1/3,
- thua 1 đồng với xác suất 1/3.

Khi đó chúng ta cần nghiên cứu xem số tiền của ông A có thể thu được sau n ván là bao nhiêu? Nó có tuân theo một quy luật xác suất gì hay không? Để giải quyết vấn đề này, ta xây dựng mô hình toán học như sau: Gọi X_n (đồng) là số tiền của ông A sau ván thứ $n, (n \geq 0)$ và không mất tính tổng quát ta giả sử $X_0 = 0$ là số vốn ban đầu của người chơi. Khi đó $(X_n)_{n\geq 0}$ là quá trình ngẫu nhiên với tập giá trị trên $\mathbb{Z}$. Nó còn gọi là bước đi ngẫu nhiên cân bằng trên không gian trạng thái một chiều mà có cường độ dịch chuyển sang phải hoặc sang trái 1 đơn vị hoặc không dịch chuyển là như nhau. Chi tiết hơn, xác suất chuyển của nó tại vị trí bất kỳ $k \in \mathbb{Z}$ ở thời điểm $n \geq 0$ được cho bởi các biểu thức sau

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k\} = 1/3,$$

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = k \mid X_n = k\} = 1/3,$$

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = k-1 \mid X_n = k\} = 1/3.$$

Toán tử Markov tương ứng với bước đi ngẫu nhiên trên là $f \mapsto Pf$ được xác định bởi

$$Pf(X_n) = \mathbb{E}\left[f(X_{n+1}) \mid X_n \right], \forall n \geq 0$$

Trong đó, f là hàm đo được, bị chặn trên không gian trạng thái của bước đi là $\mathbb{Z}$. Cụ thể, với mô hình của bước đi đang xét, ta luôn có

$$Pf(k) = \frac{1}{3}\left[f(k-1) + f(k) + f(k+1) \right].$$

Trong Lâm Hoàng Chương và Dương Thị Bé Ba (2017), các tác giả đã đưa ra mô hình bước đi ngẫu nhiên chỉ có dịch chuyển sang phải (thắng) và sang trái (thua) 1 đơn vị với xác suất như nhau là 1/2. Khi đó một dạng của định lý giới hạn trung tâm được chỉ ra đó là

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1),$$

khi $n \to +\infty$. Trong biểu thức trên, $\xrightarrow{D}$ ký hiệu cho hội tụ theo phân phối của các biến ngẫu nhiên và $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ là luật phân phối chuẩn với trung bình 0 và phương sai σ^2. Ở đó, các tác giả đã xấp xỉ các moment bậc $k = 1, 2, 3, ...$ của X_n để có giới hạn hội tụ đến các moment bậc $k = 1, 2, 3, ...$ của $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Như vậy mô hình trong bài báo chúng ta đang xét tổng quát hơn trong Lâm Hoàng Chương và Dương Thị Bé Ba (2017). Hơn nữa, các moment bậc $k = 1, 2, 3, ...$ của X_n sẽ được tính ra kết quả cụ thể mà không cần thông qua việc dùng phương pháp xấp xỉ. Ta cũng có một dạng của định lý giới hạn trung tâm của mô hình trò chơi công bằng (thắng – hòa – thua) như sau

Định lý 1.1 Cho $(X_n)_{n\geq 0}$ là bước đi ngẫu nhiên cân bằng như trên. Khi đó ta có

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}\left(0, \frac{2}{3}\right), \ khi \ n \to +\infty.$$

Cấu trúc của bài báo được sắp xếp như sau. Mục 2 trình bày phương pháp chứng minh được sử dụng trong bài báo. Chứng minh chi tiết Định lý 1.1 được đưa ra ở Mục 3. Cuối cùng là phần kết luận vấn đề ở Mục 4.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Trong lý thuyết xác suất có rất nhiều phương pháp khác nhau để nghiên cứu phân phối giới hạn của các biến ngẫu nhiên như phương pháp hàm đặc trưng (Brown, 1971), phương pháp toán tử, phương pháp xấp xỉ martingale (Alili, 1999; Kozlov, 1985; Mathieu, 2008). Trong phần này, chúng ta nghiên cứu thêm phương pháp moment là phương pháp chứng minh sự hội tụ theo phân phối thông qua việc chứng minh sự hội của dãy các moment của biến ngẫu nhiên. Phương pháp này được giới thiệu lần đầu bởi Pafnuty Chebyshev để chứng minh định lý giới hạn trung tâm. Nó được phát biểu dưới dạng hệ quả như sau

Định lý 2.1 (Billingsley, 1995) Cho $(Z_n)_{n\geq 1}$ và $Z \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ là các biến ngẫu nhiên cùng xác định trên một không gian xác suất. Nếu $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(Z_n^{\ell}\right) = \mathbb{E}\left(Z^{\ell}\right)$ với mọi $\ell = 1, 2, 3, \ldots$ thì Z_n hội tụ theo phân phối đến Z khi $n \to \infty$.

Ta nhắc lại rằng $Z \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ thì, với mỗi $\ell = 1, 2, 3, \ldots$, ta có

$$E\left(Z^{\ell}\right) = \begin{cases} 0 & khi \quad \ell = 2k-1 \\ \dfrac{(2k)!}{k!2^k}\sigma^{2k} & khi \quad \ell = 2k. \end{cases} \tag{2.1}$$

Trong phần tiếp theo, ta sẽ vận dụng Định lý 2.1 cho $Z_n = X_n / \sqrt{n}$ và phân phối giới hạn là $Z \sim \mathcal{N}(0, 2/3)$. Khi đó ta cần chỉ ra rằng

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)^{\ell}\right] = E\left(Z^{\ell}\right), \text{với mọi } \ell = 1, 2, 3, \ldots$$

Ta có bổ đề cơ bản sau liên quan đến đến tổng các số tự nhiên và các dạng mở rộng của nó.

Bổ đề 2.2 Tổng n số tự nhiên đầu tiên là

$$1+2+...+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

Hơn nữa, ta cũng có

$$1.2+2.3+...+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2),$$

$$1.2.3+2.3.4+...+n(n+1)(n+2)$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Tổng quát

$$1.2...k+2.3...(k+1)+...+n(n+1)...(n+k-1)$$

$$=\frac{1}{k+1}n(n+1)(n+2)...(n+k). \quad (2.2)$$

Chứng minh. Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương ta được kết luận của biểu thức (2.2) như trên. □

3. KẾT QUẢ THỰC HIỆN

Ta chia Bài toán làm hai trường hợp cho moment bậc lẻ và moment bậc chẵn của $X_n/\sqrt{n}$. Trong bài báoc của Lâm Hoàng Chương và Dương Thị Bé Ba (2017), các moment này chỉ tính xấp xỉ và lấy giới hạn khi $n\to\infty$. Ở đây, chúng ta sẽ đưa ra biểu thức tính cụ thể cho các giá trị này, từ đó dễ dàng lấy giới hạn khi $n\to\infty$. Khi đó, Định lý 1.1 hoàn toàn được chứng minh nhờ áp dụng phương pháp moment như đã giới thiệu trong Định lý 2.1.

Đầu tiên, ta xét trường hợp moment bậc lẻ. Vì phân phối giới hạn $Z\sim\mathcal{N}(0,2/3)$ có các moment bậc lẻ $E[(Z)^{2k-1}]=0$ với mọi $k\geq 1$ nên ta cũng cần chỉ ra các moment bậc lẻ của quá trình đang xét phải có giới hạn bằng *0*. Hơn thế, Mệnh đề 3.1 sau đây còn khẳng định rằng các moment đó bằng *0* do quá trình đang xét cân bằng hay có tính đối xứng. Trong chứng minh có sử dụng phương pháp đệ quy và quy nạp kết hợp Bổ đề 2.2 trong việc tính tổng các số tự nhiên.

Mệnh đề 3.1 Với mỗi $k\geq 1$, ta có

$$E[(Z)^{2k-1}]=0$$

Chứng minh. Trước hết, ta xét trường hợp $k=1$. Ta cần chỉ ra rằng

$$E\left[X_n\right]=0.$$

Phương trình Poisson với I là toán tử đồng nhất cho ta

$$\begin{cases}(P-I)g_1(m)=0, \forall m\in\mathbb{Z}\\ \quad g_1(0)=0,\ g_1(1)=1\end{cases}$$

có duy nhất một nghiệm. Thật vậy, từ phương trình $(P-I)g_1(m)=0$ (3.1) dẫn đến

$$[g_1(m+1)-g_1(m)]-[g_1(m)-g_1(m-1)]=0.$$

Nếu $m\geq 2$ thì đệ quy theo $m, m-1,...,1$ ta được

$$[g_1(m)-g_1(m-1)]-[g_1(1)-g_1(0)]=0.$$

Vì giả thiết $g_1(1)=g_1(0)=0$ nên ta được

$$g_1(m)-g_1(m-1)=1.$$

Tiếp tục đệ quy theo $m-1, m-2,...,1$ và kết hợp giả thiết $g_1(0)=0$ ta được $g_1(m)=m.$

Nếu $m\leq -1$ thì đệ quy theo $m, m+1,...,-1$ ta cũng được kết quả tương tự. Như vậy

$$g_1(m)=m, m\in\mathbb{Z} \quad (3.2)$$

là nghiệm duy nhất của phương trình (3.1). Mặt khác, thế m bởi X_n trong Biểu thức (3.1) rồi lấy kỳ vọng ta được

$$E[g_1(X_{n+1})]-E[g_1(X_n)]=0, \forall n\geq 0.$$

Trong kết quả trên ta có sử dụng kết quả $E[E\left(g_1(X_{n+1})\mid X_n\right)]=E[g_1(X_{n+1})]$ được áp dụng từ tính chất kỳ vọng có điều kiện $E[E\left(X\mid Y\right)]=E[X]$ với mọi biến ngẫu nhiên X và Y. Tiếp theo, đệ quy theo $n, n-1,...,0$ ta được

$$E[g_1(X_n)]=0, \forall n\geq 0. \quad (3.3)$$

Cuối cùng, kết hợp (3.2) và (3.3) ta được

$$E[g_1(X_n)]=E[X_n]=0, \forall n\geq 0.$$

Từ đó ta có kết luận của Mệnh đề 3.1 cho trường hợp $k=1$.

Trường hợp $k\geq 2$ được bắt đầu với việc xét phương trình Poisson

$$\begin{cases} (P-I)g_k(m) = g_{k-1}(m), & \forall m \in \mathbb{Z} \\ g_k(0) = 0,\, g_k(1) = 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

có nghiệm duy nhất

$$g_k(m) = m\left[1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{3^i}{(2i+1)!}(m^2-1^2)(m^2-2^2)...(m^2-i^2)\right],$$

bằng cách sử dụng phương pháp đệ quy theo m và Bổ đề 2.2 cho công thức tổng quát. Đây là một đa thức bậc lẻ theo m có dạng

$$g_k(m) = a_1 m + a_3 m^3 + ... + a_{2k-1} m^{2k-1}, \quad (3.5)$$

trong đó các hệ số $a_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $a_1 = 1$. Mặt khác, thế m bởi X_n trong biểu thức (3.4) rồi lấy kỳ vọng ta được

$$E[g_{k+1}(X_{n+1})] - E[g_k(X_n)] = E[g_k(X_n)], \forall n \geq 0.$$

Kết hợp phương pháp quy nạp theo $k \geq 1$ và đệ quy theo $n, n-1, ..., 0$ ta được

$$E[g_k(X_n)] = 0, \forall n \geq 0. \quad (3.6)$$

Cuối cùng, kết hợp (3.5) và (3.6) ta được

$$E[g_k(X_n)] = E[(X_n)^{2k-1}] = 0, \forall n \geq 0.$$

Như vậy Mệnh đề 3.1 đã được chứng minh. □

Trường hợp moment bậc chẵn, ta sẽ tính chúng dựa vào công thức truy hồi của các moment có bậc thấp hơn với lưu ý rằng tất cả moment bậc lẻ bằng 0 theo Mệnh đề 3.1 như trên. Tương tự như ở mệnh đề trước, ta sẽ sử dụng phương pháp đệ quy và quy nạp cùng Bổ đề 2.2 trong việc tính tổng các số tự nhiên trong chứng minh.

Mệnh đề 3.2 Với mỗi $k \geq 1$, ta có

$$E[X_n^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!}\sigma^{2k} n^k + c_{k-1} n^{k-1} + ... + c_1 n,$$

trong đó $c_1, ..., c_{k-1} \in \mathbb{R}$ và $\sigma^2 = 2/3$. Hơn nữa, ta cũng có

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)^{2k}\right] = \frac{(2k)!}{2^k k!}\sigma^{2k}.$$

Chứng minh. Trước tiên ta xét trường hợp $k = 1$. Ta cần chỉ ra rằng

$$E[X_n^2] = \frac{2}{3}n.$$

Phương trình Poisson

$$\begin{cases} (P-I) f_1(m) = 1, \forall m \in \mathbb{Z} \\ f_1(0) = f_1(1) = 0 \end{cases}$$

có duy nhất một nghiệm. Thật vậy, từ phương trình

$$(P-I) f_1(m) = 1 \quad (3.7)$$

dẫn đến

$$[f_1(m+1) - f_1(m)] - [f_1(m) - f_1(m-1)] = 3.$$

Nếu $m \geq 2$ thì đệ quy theo $m, m-1, ..., 1$ ta được

$$[f_1(m) - f_1(m-1)] - [f_1(1) - f_1(0)] = 3(m-1).$$

Vì giả thiết $f_1(1) = f_1(0) = 0$ nên ta được

$$f_1(m) - f_1(m-1) = 3(m-1).$$

Tiếp tục đệ quy theo $m-1, m-2, ..., 1$ và kết hợp giả thiết $f_1(0) = 0$ ta được

$$f_1(m) = \frac{3}{2}m(m-1).$$

Nếu $m \leq -1$ thì đệ quy theo $m, m+1, ..., -1$ ta cũng được kết quả tương tự. Như vậy

$$f_1(m) = \frac{3}{2}m(m-1), m \in \mathbb{Z}. \quad (3.8)$$

Mặt khác, thế m bởi X_n trong biểu thức (3.7) rồi lấy kỳ vọng ta được

$$E[f_1(X_{n+1})] - E[f_1(X_n)] = 1, \forall n \geq 0.$$

Đệ quy theo $n, n-1, ..., 0$ ta được

$$E[f_1(X_n)] = n, \forall n \geq 0. \quad (3.9)$$

Cuối cùng, kết hợp (3.8) và (3.9) ta được

$$E[f_1(X_n)] = \frac{3}{2}E[X_n^2] - \frac{3}{2}E[X_n] = \frac{3}{2}E[X_n^2] = n$$

$, \forall n \geq 0.$

Từ đó ta có kết luận của Mệnh đề 3.2 cho trường hợp $k = 1$.

Trường hợp $k \geq 2$ được bắt đầu với việc xét phương trình Poisson

$$\begin{cases} (P - I) f_k(m) = f_{k-1}(m), & \forall m \in \mathbb{Z} \\ f_k(0) = 0,\ f_k(1) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

có nghiệm duy nhất

$$f_k(m) = \frac{3^k}{(2k)!}(m-k)(m-k+1)...(m+k-1), m \in \mathbb{Z},$$

bằng cách sử dụng phương pháp đệ quy theo m và Bổ đề 2.2 cho công thức tổng quát. Đây là một đa thức bậc $2k$ theo m có dạng

$$f_k(m) = a_1 m + a_2 m^2 + a_3 m^3 + ... + a_{2k} m^{2k}, \quad (3.11)$$

trong đó các hệ số $a_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $a_{2k} = 3^k / (2k)!$.

Mặt khác, thế m bởi X_n trong Biểu thức (3.10) rồi lấy kỳ vọng ta được

$$E[f_k(X_{n+1})] - E[f_k(X_n)] = E[f_{k-1}(X_n)],$$

$\forall n \geq 0.$

Kết hợp phương pháp quy nạp theo $k \geq 1$ và đệ quy theo $n, n-1, ..., 0$ ta được

$$E[f_k(X_n)] = \frac{1}{k!}(n-k+1)(n-k+2)...n, \quad (3.12)$$

$\forall n \geq 0,$

là một đa thức bậc k theo n. Cuối cùng kết hợp (3.11) và (3.12) ta được

$$E[f_k(X_n)] = E[a_2 X_n^2 + a_4 X_n^4 + ... + a_{2k} X_n^{2k}]$$

$$= \frac{1}{k!}(n-k+1)(n-k+2)...n, \forall n \geq 0.$$

Khi đó $E[X_n^{2k}]$ cũng là đa thức bậc k theo n và được xác định dựa vào các giá trị của $E[X_n^2], E[X_n^3], ..., E[X_n^{2k-2}]$ có dạng

$$E[X_n^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!}\sigma^{2k} n^k + c_{k-1} n^{k-1} + ... + c_1 n.$$

Như vậy, Mệnh đề 3.2 đã được chứng minh. □

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã chứng minh sự tồn tại một dạng của định lý giới hạn trung tâm cho mô hình trò chơi công bằng thông qua việc sử dụng phương pháp moment. Ngoài ra, điểm mấu chốt trong bài toán này ở chỗ ta có thể giải được phương trình Poisson tương ứng với một toán tử Markov P. Từ đó có thể tính được moment của biến ngẫu nhiên một cách chi tiết. Chúng tôi kỳ vọng phương pháp này có thể được áp dụng cho các bài toán khác có liên quan trong lĩnh vực.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Alili, S. (1999). Asymptotic behaviour for random walks in random environments. *J. Appl. Prob., 36*, 334–349.

Billingsley, P. (1995). *Probability and measure* (edition). Wiley. New York.

Brown, B. M. (1971). Martingale central limit theorems. *Ann. Math. Statist., 42*, 59 - 66.

Depauw, J., & Derrien, J. M. (2009). Variance limite d'une marche aléatoire réversible en milieu aléatoire sur Z. *Comptes Rendus Mathematique, 347*(7-8), 401–406.

Lam, H. C. (2014). A quenched central limit theorem for reversible random walk in random environment on Z. *Journal of Applied Probability, 51*(4): 1051-1064.

Kozlov, S. M. (1985). The averaging method and walks in inhomogeneous environments. *Uspekhi Mat. Nauk 40*, 61–120, 238.

Lâm Hoàng Chương & Dương Thị Bé Ba (2017). Tốc độ hội tụ trong định lý giới hạn trung tâm cho bước đi ngẫu nhiên trong một chiều. *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ, 49*a: 73-78.

Mathieu, P. (2008). Quenched invariance principles for random walks with random conductances. *J. Statist. Phys., 130*, 1025–1046.

Norris, J.R. (1998). *Markov chains.* Cambridge University Press. Ross, S. M. (2010). *Introduction to Probability Models*. Elsevier Inc.

Zeitouni, O. (2006). Random walks in random environments. *J. Phys., A39*, R433-R464.