Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ

Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên

website: ctujsvn.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2022.102

ĐỐI NGẪU LAGRANGE VÀ ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU DẠNG ĐIỂM YÊN CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU NỬA VÔ HẠN VỚI RÀNG BUỘC BIẾN MẤT

Lê Thanh Tùng[1], Trần Thiện Khải[2*] và Trịnh Tùng[3]

[1]*Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*
[2]*Trung tâm Đào tạo và Hợp tác Doanh nghiệp, Trường Đại học Trà Vinh*
[3]*Trường THPT Mai Thanh Thế, Ngã Năm, Sóc Trăng*
[*]*Người chịu trách nhiệm về bài viết: Trần Thiện Khải (email: khai@tvu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 07/05/2022
Ngày nhận bài sửa: 03/06/2022
Ngày duyệt đăng: 09/06/2022

Title:
Lagrange duality and saddle point optimality conditions for semi-infinite programming with vanishing constraints

Từ khóa:
Điều kiện tối ưu điểm yên, đối ngẫu Lagrange, ràng buộc biến mất, tối ưu nửa vô hạn

Keywords:
Lagrange duality, saddle point optimality conditions, semi-infinite programming, vanishing constraints

ABSTRACT

This paper is intended to investigate Lagrange duality and saddle point optimality conditions for semi-infinite programming problems with vanishing constraints. Although Mond-Weir and Wolfe duality were considered for this problem, there is no paper dealing with Lagrange duality. Lagrange duality may be easier to deal from algorithmic point of view rather than other dualities. In the first part of this paper, Lagrange dual problems are formulated and duality relations are explored under convexity assumptions. Then, the saddle point optimality conditions for semi-infinite programming problems with vanishing constraints are discussed. Some examples are also provided to illlustrate the results of the paper.

TÓM TẮT

Bài báo này nghiên cứu về đối ngẫu Lagrange và tiêu chuẩn tối ưu dạng điểm yên cho bài toán tối ưu nửa vô hạn với ràng buộc biến mất. Mặc dù, các mô hình đối ngẫu dạng Mond-Weir và dạng Wolfe đã được khảo sát cho bài toán này, nhưng chưa có bài báo nào đề cập đến dạng đối ngẫu Lagrange. Mô hình đối ngẫu dạng Lagrange có thể dễ xử lý từ quan điểm thuật toán hơn là các mô hình đối ngẫu đã biết khác. Trong phần đầu bài báo, bài toán đối ngẫu dạng Lagrange được thiết lập và các quan hệ đối ngẫu được khảo sát theo các giả thiết lồi. Sau đó, các điều kiện tối ưu dạng điểm yên cho bài toán ưu nửa vô hạn với ràng buộc biến mất được thảo luận. Một số ví dụ cũng được cung cấp để minh họa các kết quả của bài báo.

1. MỞ ĐẦU

Tối ưu hóa cấu trúc và tô pô là một lớp đặc biệt các bài toán tối ưu hóa. Bài toán này có thể được thiết lập lại như bài toán quy hoạch toán học với các ràng buộc biến mất, được Achtziger and Kanzow (2008) đề xuất. Một số bài toán tối ưu hóa trong thực tế giải quyết số lượng vô hạn các ràng buộc. Các bài toán này được gọi là bài toán tối ưu nửa vô hạn. Những nghiên cứu tiêu biểu gần đây đều triển khai theo hướng này, cụ thể là kết quả trong bài báo của Vaz et al. (2004), Kanzi (2015), Pandey and Mishra (2016), Caristi and Ferrara (2017), Chuong and Jeyakumar (2017), Kabgani and Soleimani-damaneh (2018), Tung (2018), Ghate (2020), Tung (2020a) và các tài liệu tham khảo trong đó.

Trong bài báo Guu et al. (2017), điều kiện tối ưu đủ dạng Karush-Kuhn-Tucker (KKT) cho bài toán tối ưu nửa vô hạn với ràng buộc biến mất (viết tắt là

SIPVC) được thiết lập. Các bài báo Tung (2020b, 2020c) đã thiết lập điều kiện cần tối ưu dạng KKT và khảo sát các bài toán đối ngẫu dạng Mond-Weir và dạng Wolfe cho bài toán SIPVC. Tuy nhiên, chưa có bài báo nào đề cập đến dạng đối ngẫu Lagrange và tiêu chuẩn tối ưu dạng điểm yên cho bài toán SIPVC. Lưu ý rằng mô hình đối ngẫu dạng Lagrange có thể dễ xử lý từ quan điểm thuật toán hơn là các mô hình đối ngẫu đã biết khác, xem Mishra et al. (2016), Singh et al. (2017), Singh et al. (2019) và các tài liệu tham khảo trong đó.

Từ các quan sát trên, đối ngẫu Lagrange được xem xét và tiêu chuẩn tối ưu dạng điểm yên cho bài toán SIPVC trong bài báo này.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong bài báo này, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ được sử dụng để ký hiệu tích trong trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$. Với $\bar{x}$ cho trước, $\mathcal{U}(\bar{x})$ là một hệ các lân cận của $\bar{x}$. Với tập $A\subseteq\mathbb{R}^n$, ký hiệu $\operatorname{int} A, \operatorname{cl} A, \operatorname{span} A$ và $\operatorname{co} A$ lần lượt là phần trong, bao đóng, bao tuyến tính và bao lồi của tập A. Nón và nón lồi (chứa gốc) được sinh bởi A được ký hiệu lần lượt bởi $\operatorname{cone} A$ và $\operatorname{pos} A$. Nón cực âm và phần bù trực giao của tập A được xác định tương ứng bởi:

$$A^{-} := \left\{x^* \in \mathbb{R}^n \mid \left\langle x^*, x\right\rangle \le 0, \forall x \in A\right\};$$

$$A^{\perp} := \left\{x^* \in \mathbb{R}^n \mid \left\langle x^*, x\right\rangle = 0, \forall x \in A\right\}.$$

Với tập con khác rỗng A của $\mathbb{R}^n$ cho trước, nón contingent của tập A tại $\bar{x}\in\operatorname{cl} A$ là:

$$T(A,\bar{x}) := \{x\in\mathbb{R}^n \mid \exists \tau_k \downarrow 0, \exists x_k \to x, \forall k\in\mathbb{N}, \bar{x}+\tau_k x_k \in A\}.$$

Với một tập con có chỉ số $I\subset\{1,\ldots,n\}$, $x_I = 0\left(x_I \ge 0\right)$ viết tắt của $x_i = 0\left(x_i \ge 0\right.$, tương ứng) với mọi $i\in I$. Hàm khả vi φ được xác định trên tập lồi khác rỗng $X\subseteq\mathbb{R}^n$ là hàm lồi tại $\bar{x}$ nếu và chỉ nếu $\langle\nabla\varphi(\bar{x}), x-\bar{x}\rangle \le \varphi(x)-\varphi(\bar{x}), \forall x\in X$.

Theo quan điểm của Guu et al. (2017), xét bài toán tối ưu nửa vô hạn với ràng buộc biến mất (P) như sau:

$$\min f(x)$$

$$\text{sao cho } \begin{array}{l} g_t(x)\le 0, t\in T,\\ h_i(x)=0, i\in I_h:=\{1,\ldots,q\},\\ H_i(x)\ge 0, G_i(x)H_i(x)\le 0, i\in I_l:=\{1,\ldots,l\},\end{array}$$

trong đó $f, g_t(t\in T), h_i\left(i\in I_h\right)$ và $G_i, H_i\left(i\in I_l\right)$ là các hàm khả vi liên tục từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$. Tập chỉ số T là tập khác rỗng bất kỳ, không cần thiết hữu hạn. Tập nghiệm khả thi của bài toán (P) có dạng:

$$\Omega := \left\{x\in\mathbb{R}^n \mid g_t(x)\le 0(t\in T), h_i(x)=0\left(i\in I_h\right), H_i(x)\ge 0, G_i(x)H_i(x)\le 0\left(i\in I_l\right)\right\}.$$

Điểm $\bar{x}\in\Omega$ gọi là nghiệm địa phương của bài toán (P) nếu tồn tại $U\in\mathcal{U}(\bar{x})$ sao cho $f(\bar{x})\le f(x), \forall x\in\Omega\cap U$. Nếu $U=\mathbb{R}^n$, cụm từ "địa phương" được bỏ đi. Ký hiệu $\mathbb{R}_+^{|T|}$ là tập hợp tất cả các hàm $\lambda: T\to\mathbb{R}$ chỉ nhận giá trị λ_t dương tại một số điểm hữu hạn của T và bằng 0 tại các điểm còn lại. Với mỗi $\bar{x}\in\Omega$, định nghĩa:

$$I_g(\bar{x}) := \left\{t\in T \mid g_t(\bar{x})=0\right\},$$

$$\Lambda(\bar{x}) := \left\{\lambda\in\mathbb{R}_+^{|T|} \mid \lambda_t g_t(\bar{x})=0, \forall t\in T\right\},$$

$$I_+(\bar{x}) := \left\{i\in I_l \mid H_i(\bar{x})>0\right\},$$

$$I_0(\bar{x}) := \left\{i\in I_l \mid H_i(\bar{x})=0\right\},$$

$$I_{+0}(\bar{x}) := \left\{i\in I_l \mid H_i(\bar{x})>0, G_i(\bar{x})=0\right\},$$

$$I_{+-}(\bar{x}) := \left\{i\in I_l \mid H_i(\bar{x})>0, G_i(\bar{x})<0\right\},$$

$$I_{0+}(\bar{x}) := \left\{i\in I_l \mid H_i(\bar{x})=0, G_i(\bar{x})>0\right\},$$

$$I_{00}(\bar{x}) := \left\{i\in I_l \mid H_i(\bar{x})=0, G_i(\bar{x})=0\right\},$$

$$I_{0-}(\bar{x}) := \left\{i\in I_l \mid H_i(\bar{x})=0, G_i(\bar{x})<0\right\}.$$

Định nghĩa 2.1. Điểm $\bar{x}\in\Omega$ được gọi là điểm VC-dừng của bài toán (P) nếu và chỉ nếu tồn tại $\lambda := \left(\lambda^g, \lambda^h, \lambda^H, \lambda^G\right)\in\Lambda(\bar{x})\times\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^l$ với $\lambda^H_{I_+(\bar{x})}=0, \lambda^H_{I_{00}(\bar{x})\cup I_{0-}(\bar{x})}\ge 0$, $\lambda^G_{I_{+-}(\bar{x})\cup I_{0+}(\bar{x})\cup I_{0-}(\bar{x})}=0$ và $\lambda^G_{I_{+0}(\bar{x})\cup I_{00}(\bar{x})}\ge 0$ sao cho

$$\nabla f(\bar{x})+\sum_{t\in T}\lambda_t^g\nabla g_t(\bar{x})+\sum_{i\in I_h}\lambda_i^h\nabla h_i(\bar{x}) -\sum_{i\in I_l}\lambda_i^H\nabla H_i(\bar{x})+\sum_{i\in I_l}\lambda_i^G\nabla G_i(\bar{x})=0. \tag{2.1}$$

Với $\bar{x} \in \Omega$ và $\lambda \in \mathbb{R}_+^{|T|} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$, định nghĩa

$$I_g^+(\bar{x}) := \left\{ t \in I_g(\bar{x}) |\ \lambda_t^g > 0 \right\},$$
$$I_h^+(\bar{x}) := \left\{ i \in I_h(\bar{x}) |\ \lambda_i^h > 0 \right\},$$
$$I_h^-(\bar{x}) := \left\{ i \in I_h(\bar{x}) |\ \lambda_i^h < 0 \right\},$$
$$\hat{I}_+^+(\bar{x}) := \left\{ i \in I_+(\bar{x}) |\ \lambda_i^H > 0 \right\},$$
$$\hat{I}_0^+(\bar{x}) := \left\{ i \in I_0(\bar{x}) |\ \lambda_i^H > 0 \right\},$$
$$\hat{I}_0^-(\bar{x}) := \left\{ i \in I_0(\bar{x}) |\ \lambda_i^H < 0 \right\},$$
$$\hat{I}_{0+}^+(\bar{x}) := \left\{ i \in I_{0+}(\bar{x}) |\ \lambda_i^H > 0 \right\},$$
$$\hat{I}_{0+}^-(\bar{x}) := \left\{ i \in I_{0+}(\bar{x}) |\ \lambda_i^H < 0 \right\},$$
$$\hat{I}_{00}^+(\bar{x}) := \left\{ i \in I_{00}(\bar{x}) |\ \lambda_i^H > 0 \right\},$$
$$\hat{I}_{00}^-(\bar{x}) := \left\{ i \in I_{00}(\bar{x}) |\ \lambda_i^H < 0 \right\},$$
$$\hat{I}_{0-}^+(\bar{x}) := \left\{ i \in I_{0-}(\bar{x}) |\ \lambda_i^H > 0 \right\},$$
$$I_{+0}^+(\bar{x}) := \left\{ i \in I_{+0}(\bar{x}) |\ \lambda_i^G > 0 \right\},$$
$$I_{+0}^-(\bar{x}) := \left\{ i \in I_{+0}(\bar{x}) |\ \lambda_i^G < 0 \right\},$$
$$I_{+-}^+(\bar{x}) := \left\{ i \in I_{+-}(\bar{x}) |\ \lambda_i^G > 0 \right\},$$
$$I_{0+}^+(\bar{x}) := \left\{ i \in I_{0+}(\bar{x}) |\ \lambda_i^G > 0 \right\},$$
$$I_{0+}^-(\bar{x}) := \left\{ i \in I_{0+}(\bar{x}) |\ \lambda_i^G < 0 \right\},$$
$$I_{00}^+(\bar{x}) := \left\{ i \in I_{00}(\bar{x}) |\ \lambda_i^G > 0 \right\},$$
$$I_{00}^-(\bar{x}) := \left\{ i \in I_{00}(\bar{x}) |\ \lambda_i^G < 0 \right\},$$
$$I_{0-}^+(\bar{x}) := \left\{ i \in I_{0-}(\bar{x}) |\ \lambda_i^G > 0 \right\}.$$

Định nghĩa 2.2. (Tung, 2020b) Điều kiện (VC-ACQ) thỏa tại $\bar{x} \in \Omega$ nếu

$$\left(\bigcup_{t \in I_g(\bar{x})} \nabla g_t(\bar{x}) \right)^- \cap \left(\bigcup_{i \in I_h} \nabla h_i(\bar{x}) \right)^\perp$$
$$\cap \left(\bigcup_{i \in I_{0+}(\bar{x})} \nabla H_i(\bar{x}) \right)^\perp \cap \left(\bigcup_{i \in I_{00}(\bar{x}) \cup I_{0-}(\bar{x})} -\nabla H_i(\bar{x}) \right)^-$$
$$\cap \left(\bigcup_{i \in I_{+0}(\bar{x}) \cup I_{00}(\bar{x})} \nabla G_i(\bar{x}) \right)^- \subseteq T(\Omega, \bar{x}).$$

Mệnh đề 2.1. (Tung, 2020b) Cho $\bar{x} \in \Omega$ là một nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P). Nếu điều kiện (VC-ACQ) thỏa tại $\bar{x}$ và tập

$$\Delta_1 := \operatorname{pos}\left(\bigcup_{t \in I_g(\bar{x})} \nabla g_t(\bar{x}) \cup \bigcup_{i \in I_{00}(\bar{x}) \cup I_{0-}(\bar{x})} (-\nabla H_i(\bar{x})) \right.$$
$$\left. \cup \bigcup_{i \in I_{+0}(\bar{x}) \cup I_{00}(\bar{x})} \nabla G_i(\bar{x}) \right) + \operatorname{span}\left(\bigcup_{i \in I_h} \nabla h_i(\bar{x}) \cup \bigcup_{i \in I_{0+}(\bar{x})} \nabla H_i(\bar{x}) \right)$$

đóng, thì $\bar{x}$ là một điểm VC-dừng của bài toán (P).

3. ĐỐI NGẪU DẠNG LAGRANGE CỦA BÀI TOÁN SIPVC

Với $x \in \Omega$ và $\lambda = \left(\lambda^g, \lambda^h, \lambda^H, \lambda^G\right) \in \mathbb{R}_+^{|T|} \times \mathbb{R}^q$ $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$, định nghĩa

$$\hat{L}(x,\lambda) = f(x) + \sum_{t \in T} \lambda_t^g g_t(x) + \sum_{i \in I_h} \lambda_i^h h_i(x) - \sum_{i \in I_l} \lambda_i^H H_i(x) + \sum_{i \in I_l} \lambda_i^G G_i(x),$$

và $\varphi(\lambda) = \min_{x \in \Omega} \hat{L}(x,\lambda)$. Khi đó,

$$\nabla_x \hat{L}(x,\lambda) = \nabla f(x) + \sum_{t \in T} \lambda_t^g \nabla g_t(x) + \sum_{i \in I_h} \lambda_i^h \nabla h_i(x) - \sum_{i \in I_l} \lambda_i^H \nabla H_i(x) + \sum_{i \in I_l} \lambda_i^G \nabla G_i(x).$$

Mô hình đối ngẫu dạng Lagrange phụ thuộc vào $x \in \Omega$ của bài toán (P) được đề xuất như sau:

$$D_L(x): \quad \max \varphi(\lambda)$$

sao cho $\lambda_{T \setminus I_g(x)}^g \geq 0, \lambda_{I_+(x)}^H \geq 0$,

$\lambda_{I_{+-}(x) \cup I_{0-}(x)}^G \geq 0, \lambda_{I_{0+}(x)}^G \leq 0$.

Ký hiệu $\Omega_{D_L(x)}$ là miền khả thi của bài toán $D_L(x)$. Bây giờ, đối ngẫu dạng Lagrange không phụ thuộc vào điểm khả thi của bài toán (P) được xét như sau:

$$(D_L): \quad \max \varphi(\lambda)$$

sao cho $\lambda \in \Omega_{D_L} := \cap_{x \in \Omega} \Omega_{D_L(x)}$, trong đó $\Omega_{D_L} = \cap_{x\in\Omega}\Omega_{D_L(x)} \neq 0$ là tập khả thi của bài toán $\left(D_L\right)$.

Mệnh đề 3.1. (Đối ngẫu yếu) Nếu x là một điểm khả thi của bài toán (P) và λ là một điểm khả thi của bài toán $D_L(x)$, thì $\varphi(\lambda) \leq f(x)$.

Chứng minh. Từ $\varphi(\lambda) = \min_{x\in\Omega} \hat{L}(x,\lambda)$, với mọi $x \in \Omega$, ta có:

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) \leq f(x) &+ \sum_{t\in T}\lambda_t^g g_t(x) + \sum_{i\in I_h}\lambda_i^h h_i(x)\\ &-\sum_{i\in I_l}\lambda_i^H H_i(x) + \sum_{i\in I_l}\lambda_i^G G_i(x)\end{aligned} \tag{3.1}$$

Từ $x \in \Omega$ ta suy ra $g_t(x) \leq 0 (t \in T), h_i(x) = 0$ $\left(i \in I_h\right), -H_i(x) \leq 0\left(i \in I_l\right)$, $G_i(x)H_i(x) \leq 0$ $\left(i \in I_l\right)$. Do đó,

$\sum_{t\in I_g(x)}\lambda_t^g g_t(x) = 0$ và

$g_t(x) < 0, \lambda_t^g \geq 0, \forall t \in T \setminus I_g(x)$,

$\sum_{i\in I_0(x)}\lambda_i^H H_i(x) = 0$ và

$-H_i(x) < 0, \lambda_i^H \geq 0, \forall i \in I_+(x)$,

$\sum_{i\in I_{+0}(x)\cup I_{00}(x)}\lambda_i^G G_i(x) = 0$ và

$G_i(x) > 0, \lambda_i^G \leq 0, \forall i \in I_{0+}(x)$,

$G_i(x) < 0, \lambda_i^G \geq 0, \forall i \in I_{+-}(x) \cup I_{0-}(x)$.

Từ các bất đẳng thức trên, suy ra

$$\begin{aligned}&\sum_{t\in T}\lambda_t^g g_t(x) + \sum_{i\in I_h}\lambda_i^h h_i(x)\\ &\quad-\sum_{i\in I_l}\lambda_i^H H_i(x) + \sum_{i\in I_l}\lambda_i^G G_i(x) \leq 0.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Điều này cùng với (3.1), dẫn đến $\varphi(\lambda) \leq f(x)$. □

Hệ quả 3.1. Nếu $\bar{x}$ và $\bar{\lambda}$ lần lượt là các điểm khả thi của bài toán (P) và $D_L(\bar{x})$ và $f(\bar{x}) = \varphi(\bar{\lambda})$, thì $\bar{x}$ và $\bar{\lambda}$ lần lượt là các nghiệm tối ưu của các bài toán (P) và $D_L(\bar{x})$.

Mệnh đề 3.2. (Đối ngẫu mạnh) Cho $\bar{x}$ là nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P) sao cho điều kiện (VC-ACQ) thỏa tại $\bar{x}$ và Δ_1 đóng. Nếu $f, g_t\left(t \in I_g^+(\bar{x})\right), h_i\left(i \in I_h^+(\bar{x})\right), -h_i\left(i \in I_h^-(\bar{x})\right)$, $H_i\left(i \in \hat{I}_{0+}^-(\bar{x})\right), -H_i\left(i \in \hat{I}_{0+}^+(\bar{x}) \cup \hat{I}_{00}^+(\bar{x}) \cup \hat{I}_{0-}^+(\bar{x})\right)$, $G_i\left(i \in I_{+0}^+(\bar{x}) \cup I_{00}^+(\bar{x})\right)$ là các hàm lồi tại $\bar{x}$, thì tồn tại $\bar{\lambda}$ sao cho $\bar{\lambda}$ là nghiệm của $D_L(\bar{x})$ và $f(\bar{x}) = \hat{L}(\bar{x},\bar{\lambda})$.

Chứng minh. Từ các giả thiết và Mệnh đề 2.1, chúng ta suy ra $\bar{x}$ là điểm VC-dừng của bài toán (P). Do vậy, tồn tại $\bar{\lambda} \in \Lambda(\bar{x}) \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ sao cho

$$\nabla_x \hat{L}(\bar{x},\bar{\lambda}) = 0, \tag{3.3}$$

$$\bar{\lambda}_{I_+(\bar{x})}^H = 0, \bar{\lambda}_{I_{00}(\bar{x})\cup I_{0-}(\bar{x})}^H \geq 0, \tag{3.4}$$

$$\bar{\lambda}_{I_{+-}(\bar{x})\cup I_{0+}(\bar{x})\cup I_{0-}(\bar{x})}^G = 0, \bar{\lambda}_{I_{+0}(\bar{x})\cup I_{00}(\bar{x})}^G \geq 0. \tag{3.5}$$

Do $\bar{\lambda}^g \in \Lambda(\bar{x})$, ta có $\bar{\lambda}_t^g g_t(\bar{x}) = 0$ với mọi $t \in T$, và do vậy, $\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t^g g_t(\bar{x}) = 0$. Bởi vì $g_t(\bar{x}) < 0 \left(t \in T \setminus I_g(\bar{x})\right)$, ta có $\bar{\lambda}_{T\setminus I_g(x)}^g = 0$, dẫn đến $\bar{\lambda} \in \Omega_{D_L(\bar{x})}$. Điều kiện $\bar{x} \in \Omega$ khẳng định rằng $\sum_{i\in I_h}\bar{\lambda}_i^h h_i(\bar{x}) = 0$. Hơn nữa, từ $\bar{\lambda}_{I_+(\bar{x})}^H = 0$ và $H_i(\bar{x}) = 0$ với mọi $i \in I_0(\bar{x})$, ta suy ra được $\sum_{i\in I_l}\bar{\lambda}_i^H H_i(\bar{x}) = 0$.

Tương tự, do $\bar{\lambda}_{I_{+-}(\bar{x})\cup I_{0_+}(\bar{x})\cup I_{0-}(\bar{x})}^G = 0$ và $G_i(\bar{x}) = 0$ với mọi $i \in I_{+0}(\bar{x}) \cup I_{00}(\bar{x})$, ta có $\sum_{i\in I_l}\bar{\lambda}_i^G G_i(\bar{x}) = 0$. Do đó,

$$\begin{aligned}&\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t g_t(\bar{x}) + \sum_{i\in I_h}\bar{\lambda}_i^h h_i(\bar{x})\\ &\quad-\sum_{i\in I_l}\bar{\lambda}_i^H H_i(\bar{x}) + \sum_{i\in I_l}\bar{\lambda}_i^G G_i(\bar{x}) = 0,\end{aligned}$$

kéo theo $f(\bar{x}) = \hat{L}(\bar{x},\bar{\lambda})$. (3.6)

Hơn nữa, từ tính lồi của các hàm f, g_t, $\left(t \in I_g^+(\bar{x})\right), h_i\left(i \in I_h^+(\bar{x})\right), -h_i\left(i \in I_h^-(\bar{x})\right)$ $H_i(i \in \hat{I}_{0+}^-(\bar{x}))$, $-H_i(i \in \hat{I}_{0+}^+(\bar{x}) \cup \hat{I}_{00}^+(\bar{x}) \cup \hat{I}_{0-}^+(\bar{x}))$, $G_i\left(i \in I_{+0}^+(\bar{x}) \cup I_{00}^+(\bar{x})\right)$ tại $\bar{x}$ và các định nghĩa của các tập chỉ số chúng ta suy ra rằng với mỗi $x \in \Omega$, $f(x) - f(\bar{x}) \geq \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle$ và

$$g_t(x) - g_t(\bar{x}) \geq \left\langle \nabla g_t(\bar{x}), x - \bar{x} \right\rangle, \bar{\lambda}_t^g > 0, \forall t \in I_g^+(\bar{x}),$$

$$h_i(x) - h_i(\bar{x}) \geq \left\langle \nabla h_i(\bar{x}), x - \bar{x} \right\rangle, \bar{\lambda}_i^h > 0, \forall i \in I_h^+(\bar{x}),$$

$$-h_i(x) - \left(-h_i(\bar{x})\right) \geq \left\langle -\nabla h_i(\bar{x}), x - \bar{x} \right\rangle, \bar{\lambda}_i^h < 0, \forall i \in I_h^-(\bar{x}),$$

$$H_i(x) - H_i(\bar{x}) \geq \left\langle \nabla H_i(\bar{x}), x - \bar{x} \right\rangle, \bar{\lambda}_i^H < 0, \forall i \in \hat{I}_{0+}^-(\bar{x}),$$

$$-H_i(x) - \left(-H_i(\bar{x})\right) \geq \left\langle -\nabla H_i(\bar{x}), x - \bar{x} \right\rangle,$$
$$\bar{\lambda}_i^H > 0, \forall i \in \hat{I}_{0+}^+(\bar{x}) \cup \hat{I}_{00}^+(\bar{x}) \cup \hat{I}_{0-}^+(\bar{x}),$$

$$G_i(x) - G_i(\bar{x}) \geq \left\langle \nabla G_i(\bar{x}), x - \bar{x} \right\rangle,$$
$$\bar{\lambda}_i^G > 0, \forall i \in I_{+0}^+(\bar{x}) \cup I_{00}^+(\bar{x}).$$

Các bất đẳng thức trên cùng với (3.4) và (3.5) dẫn đến

$$f(x) + \sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t g_t(x) + \sum_{i \in I_h} \bar{\lambda}_i^h h_i(x) - \sum_{i \in I_l} \bar{\lambda}_i^H H_i(x)$$
$$+ \sum_{i \in I_l} \bar{\lambda}_i^G G_i(x) - \left(f(\bar{x}) + \sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t g_t(\bar{x}) + \sum_{i \in I_h} \bar{\lambda}_i^h h_i(\bar{x}) \right.$$
$$\left. - \sum_{i \in I_l} \bar{\lambda}_i^H H_i(\bar{x}) + \sum_{i \in I_l} \bar{\lambda}_i^G G_i(\bar{x}) \right)$$
$$\geq \left\langle \nabla f(x) + \sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t^g \nabla g_t(x) + \sum_{i \in I_h} \bar{\lambda}_i^h \nabla h_i(\bar{x}) \right.$$
$$\left. - \sum_{i \in I_l} \bar{\lambda}_i^H \nabla H_i(\bar{x}) + \sum_{i \in I_l} \bar{\lambda}_i^G \nabla G_i(\bar{x}), x - \bar{x} \right\rangle.$$

Từ kết quả này, cùng với (3.3), ta được:

$$\hat{L}(x, \bar{\lambda}) \geq \hat{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}), \forall x \in \Omega. \qquad (3.7)$$

Kết hợp với (3.6), cho thấy

$$f(\bar{x}) = \hat{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \min_{x \in \Omega} \hat{L}(x, \bar{\lambda}) = \varphi(\bar{\lambda}). \quad (3.8)$$

Hơn nữa, từ Mệnh đề 3.1, ta có $\varphi(\lambda) \leq f(\bar{x}), \forall \lambda \in \Omega_{D_L(\bar{x})}$. Kết hợp điều này với (3.8), ta suy ra được $\varphi(\lambda) \leq \varphi(\bar{\lambda}), \forall \lambda \in \Omega_{D_L(\bar{x})}$. **Ví dụ 3.1.** Xét bài toán (P) như sau:

$$\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1$$

sao cho $g_t(x) = -x_1 + t - 1 \leq 0, \forall t \in T := [0,1]$

$$H_1(x) = x_1 - x_2 \geq 0, G_1(x)H_1(x) = x_1\left(x_1 - x_2\right) \leq 0.$$

Khi đó, $\Omega = \cup_{i=1}^3 \Omega^i$, trong đó

$$\Omega^1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_1 - x_2 = 0 \right\},$$

$$\Omega^2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0, x_2 = 0 \right\}$$

và $\Omega^3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0, x_2 < 0 \right\}$.

Hàm đối ngẫu Lagrange của bài toán (P) được cho bởi

$$\hat{L}(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + \lambda_1^g\left(-x_1\right) - \lambda_1^H\left(x_1 - x_2\right) + \lambda_1^G x_1.$$

Do đó, ta có $\lambda = \left(\lambda_1^g, \lambda_1^H, \lambda_1^G\right)$ và

$$\varphi(\lambda) = \min_{x \in \Omega} \hat{L}(x, \lambda)$$
$$= -\frac{\left(\lambda_1^g + \lambda_1^H - \lambda_1^G - 1\right)^2}{4} - \frac{\left(\lambda_1^H\right)^2}{4}.$$

Từ $\Omega = \cup_{i=1}^3 \Omega^i$, ta có ba dạng bài toán đối ngẫu dạng Lagrange như sau:

Với mỗi $x \in \Omega^1$, $I_g(x) = \varnothing$, $I_{0+}(x) = \{1\}$, $I_+(x) = I_{00}(x) = I_{0-}(x) = \varnothing$

$$D_L^1(x): \quad \max\left\{ \varphi(\lambda) \mid \lambda_1^g \geq 0, \lambda_1^H \in \mathbb{R}, \lambda_1^G \leq 0 \right\}.$$

Với mỗi $x \in \Omega^2$, $I_g(\bar{x}) = \{1\}$,

$$I_+(x) = I_{0+}(x) = I_{0-}(x) = \varnothing, I_{00}(x) = \{1\}$$

$$D_L^2(x): \quad \max\left\{ \varphi(\lambda) \mid \lambda_1^g \in \mathbb{R}, \lambda_1^H \in \mathbb{R}, \lambda_1^G \in \mathbb{R} \right\}.$$

Với mỗi $x \in \Omega^3, I_g(\bar{x}) = \varnothing$,

$$I_{+-}(x) = I_0(x) = \varnothing,\ I_{+0}(x) = \{1\},$$

$$D_L^3(x): \quad \max\left\{ \varphi(\lambda) \mid \lambda_1^g \geq 0, \lambda_1^H \geq 0, \lambda_1^G \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ký hiệu $\Omega_{D_L}^i$ là miền khả thi của bài toán $D_L^i(x)$ với $i = 1, 2, 3$. Khi đó, ta có

$$(D_L): \max\left\{\varphi(\lambda) \mid \lambda \in \Omega_{D_L} := \bigcap_{x\in\Omega^i, i=1,2,3} \Omega^i_{D_L(x)}\right\},$$

và do vậy, $\Omega_{D_L} = \left\{\lambda \mid \lambda^g \geq 0, \lambda^H \geq 0, \lambda^G \leq 0\right\}$. Vì vậy, dễ dàng xác định rằng, với mọi $x \in \Omega$ và $\lambda \in \Omega_{D_L(x)}$,

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1$$
$$\geq -\frac{\left(\lambda_1^g + \lambda_1^H - \lambda_1^G - 1\right)^2}{4} - \frac{\left(\lambda_1^H\right)^2}{4} = \varphi(\lambda),$$

suy ra kết luận của Mệnh đề 3.1 là đúng.

Lấy $\bar{x} = (0,0)$, ta có thể khẳng định rằng $\bar{x}$ là nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P). Bằng một số tính toán trực tiếp, ta có $T(\Omega, \bar{x}) = \Omega$, $\nabla f(\bar{x}) = \{(1,0)\}, I_g(\bar{x}) = \{1\}$ và $\nabla g_1(\bar{x}) = \{(-1,0)\}$,

$$\left(\bigcup_{t\in I_g(\bar{x})} \nabla g_t(\bar{x})\right)^- = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0\right\},$$

$$I_+(\bar{x}) = I_{0+}(\bar{x}) = I_{0-}(\bar{x}) = \emptyset, I_{00}(\bar{x}) = \{1\},$$
$$\nabla G_1(\bar{x}) = \{(1,0)\}, \nabla H_1(\bar{x}) = \{(1,-1)\},$$

$$\left(\bigcup_{i\in I_{00}(\bar{x})} \left(-\nabla H_i(\bar{x})\right)\right)^- = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 \geq 0\right\},$$

$$\left(\bigcup_{i\in I_{00}(\bar{x})} \nabla G_i(\bar{x})\right)^- = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 0\right\}.$$

Do đó, điều kiện (VC-ACQ) thỏa tại $\bar{x}$. Hơn nữa,

$$\Delta_1 = \operatorname{pos}\left(\bigcup_{t\in I_g(\bar{x})} \nabla g_t(\bar{x}) \cup \bigcup_{i\in I_{00}(\bar{x})} \left(-\nabla H_i(\bar{x})\right) \cup \bigcup_{i\in I_{00}(\bar{x})} \nabla G_i(\bar{x})\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0\right\}$$

đóng. Có thể kiểm tra các hàm $f, g_t\left(t \in I_g^+(\bar{x})\right)$, $-H_1, G_1$ lồi tại $\bar{x}$. Do vậy, tất cả các giả thiết trong Mệnh đề 3.2 được thỏa mãn. Dễ thấy rằng, $\forall x \in \Omega, \forall \lambda \in \Omega_{D_L(x)}$,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1 = -\frac{\left(\lambda_1^g + \lambda_1^H - \lambda_1^G - 1\right)^2}{4} - \frac{\left(\lambda_1^H\right)^2}{4}$$

chỉ có thể là $x_1 = x_2 = 0$ và $\lambda_1^g = 1 + \lambda_1^G, \lambda_1^H = 0$.

Do đó, tồn tại $\bar{\lambda} = (1,0,0)$ sao cho kết luận của Mệnh đề 3.2 xảy ra.

4. TIÊU CHUẨN TỐI ƯU DẠNG ĐIỂM YÊN CHO BÀI TOÁN SIPVC

Trong phần này, các điều kiện tối ưu dạng điểm yên cho bài toán (P) được đề xuất và khảo sát các mối quan hệ giữa tính đối ngẫu mạnh và điều kiện tối ưu dạng điểm yên.

Định nghĩa 4.1. Điểm $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ với $\bar{x} \in \Omega$ và $\bar{\lambda} \in \Omega_{D_L(\bar{x})}$ được gọi là điểm yên của hàm Lagrange $\hat{L}$, nếu

$$\hat{L}(\bar{x}, \lambda) \leq \hat{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq \hat{L}(x, \bar{\lambda}), \forall x \in \Omega, \forall \lambda \in \Omega_{D_L(\bar{x})}.$$

Mệnh đề 4.1. Cho $\bar{x}$ là nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P) và các giả thiết của Mệnh đề 3.2 thỏa mãn. Khi đó, tồn tại $\bar{\lambda} \in \Lambda(\bar{x}) \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$, sao cho $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ là điểm yên của hàm $\hat{L}$. Ngược lại, nếu $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \Omega \times \Omega_{D_L(\bar{x})}$ là điểm yên của hàm Lagrange $\hat{L}$ thì $\varphi(\bar{\lambda}) = f(\bar{x})$, trong đó $\bar{x}$ và $\bar{\lambda}$ lần lượt là các nghiệm tối ưu của bài toán (P) và $D_L(\bar{x})$.

Chứng minh. Từ (3.7), với mọi $x \in \Omega$, ta có:

$$\hat{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq \hat{L}(x, \bar{\lambda}). \tag{4.1}$$

Từ (3.8) và (3.2), với mọi $\lambda \in \Omega_{D_L(\bar{x})}$, ta có:

$$\hat{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(\bar{x}) \geq \hat{L}(\bar{x}, \lambda). \tag{4.2}$$

Từ (4.1) và (4.2) ta suy ra được $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ là điểm yên của hàm $\hat{L}$.

Bây giờ, cho $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \Omega \times \Omega_{D_L(\bar{x})}$ là điểm yên của hàm $\hat{L}$. Khi đó, với mọi $\lambda \in \Omega_{D_L(\bar{x})}$,

$$f(\bar{x}) + \sum_{t\in T} \lambda_t^g g_t(\bar{x}) + \sum_{i\in I_h} \lambda_i^h h_i(\bar{x}) - \sum_{i\in I_l} \lambda_i^H H_i(\bar{x}) + \sum_{i\in I_l} \lambda_i^G G_i(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) + \sum_{t\in T} \bar{\lambda}_t^g g_t(\bar{x}) + \sum_{i\in I_h} \bar{\lambda}_i^h h_i(\bar{x}) - \sum_{i\in I_l} \bar{\lambda}_i^H H_i(\bar{x}) + \sum_{i\in I_l} \bar{\lambda}_i^G G_i(\bar{x}). \tag{4.3}$$

Cho $\lambda = 0$ trong (4.3), ta thu được

$$\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t^g g_t(\bar{x})+\sum_{i\in I_h}\bar{\lambda}_i^h h_i(\bar{x}) -\sum_{i\in I_l}\bar{\lambda}_i^H H_i(\bar{x})+\sum_{i\in I_l}\bar{\lambda}_i^G G_i(\bar{x})\ge 0. \quad (4.4)$$

Bởi vì $(\bar{x},\bar{\lambda})\in\Omega\times\Omega_{D_L(\bar{x})}$, từ (3.2) ta suy ra:

$$\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t^g g_t(\bar{x})+\sum_{i\in I_h}\bar{\lambda}_i^h h_i(\bar{x}) -\sum_{i\in I_l}\bar{\lambda}_i^H H_i(\bar{x})+\sum_{i\in I_l}\bar{\lambda}_i^G G_i(\bar{x})\le 0. \quad (4.5)$$

Từ (4.4) và (4.5), ta có

$$\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t^g g_t(\bar{x})+\sum_{i\in I_h}\bar{\lambda}_i^h h_i(\bar{x}) -\sum_{i\in I_l}\bar{\lambda}_i^H H_i(\bar{x})+\sum_{i\in I_l}\bar{\lambda}_i^G G_i(\bar{x})= 0, \quad (4.6)$$

cùng với $\hat{L}(\bar{x},\bar{\lambda})\le\hat{L}(x,\bar{\lambda})$ với mọi $x\in\Omega$, dẫn đến

$$f(\bar{x})=\hat{L}(\bar{x},\bar{\lambda})=\min_{x\in\Omega}\hat{L}(x,\bar{\lambda})=\varphi(\bar{\lambda}).$$

Theo Hệ quả 3.1, $\bar{x}$ và $\bar{\lambda}$ lần lượt là các nghiệm tối ưu của bài toán (P) và $D_L(\bar{x})$. □

Mệnh đề 4.2. Cho $\bar{x}\in\Omega$ là điểm VC-dừng của bài toán (P). Giả sử $f, g_t\left(t\in I_g^+(\bar{x})\right)$, $h_i\left(i\in I_h^+(\bar{x})\right), -h_i\left(i\in I_h^-(\bar{x})\right), H_i\left(i\in \hat{I}_{0+}^-(\bar{x})\right)$, $-H_i\left(i\in \hat{I}_{0+}^+(\bar{x})\cup\hat{I}_{00}^+(\bar{x})\cup\hat{I}_{0-}^+(\bar{x})\right)$, $G_i\left(i\in I_{+0}^+(\bar{x})\cup I_{00}^+(\bar{x})\right)$ là các hàm lồi tại $\bar{x}$. Khi đó, tồn tại $\bar{\lambda}\in\Lambda(\bar{x})\times\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^l$ sao cho $(\bar{x},\bar{\lambda})$ là điểm yên của hàm $\hat{L}$.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
&\hat{L}(x,\bar{\lambda})-\hat{L}(\bar{x},\bar{\lambda})\\
&= f(x)+\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t g_t(x)+\sum_{i\in I_h}\bar{\lambda}_i^h h_i(x)\\
&\quad -\sum_{i\in I_l}\bar{\lambda}_i^H H_i(x)+\sum_{i\in I_l}\bar{\lambda}_i^G G_i(x)-\Bigg(f(\bar{x})+\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t^g g_t(\bar{x})\\
&\quad +\sum_{i\in I_h}\bar{\lambda}_i^h h_i(\bar{x})-\sum_{i\in I_l}\bar{\lambda}_i^H H_i(\bar{x})+\sum_{i\in I_l}\bar{\lambda}_i^G G_i(\bar{x})\Bigg).
\end{aligned}$$

Bằng cách phân tích tương tự như trong chứng minh của Mệnh đề 3.2, chúng ta suy ra được từ điều kiện $\bar{x}$ là điểm VC-dừng của bài toán (P) là

$$\hat{L}(x,\bar{\lambda})-\hat{L}(\bar{x},\bar{\lambda})\ge\left\langle\nabla_x\hat{L}(\bar{x},\bar{\lambda}),x-\bar{x}\right\rangle=0. \quad (4.7)$$

Từ (3.2) và (4.6) ta suy ra được:

$$\begin{aligned}
\hat{L}(\bar{x},\lambda) &= f(\bar{x})+\sum_{t\in T}\lambda_t^g g_t(\bar{x})+\sum_{i\in I_h}\lambda_i^h h_i(\bar{x})\\
&\quad -\sum_{i\in I_l}\lambda_i^H H_i(\bar{x})+\sum_{i\in I_l}\lambda_i^G G_i(\bar{x})\\
&\le f(\bar{x})\\
&= f(\bar{x})+\sum_{t\in T}\bar{\lambda}_t g_t(\bar{x})+\sum_{i\in I_h}\bar{\lambda}_i^h h_i(\bar{x})\\
&\quad -\sum_{i\in I_l}\bar{\lambda}_i^H H_i(\bar{x})+\sum_{i\in I_l}\bar{\lambda}_i^G G_i(\bar{x})\\
&= \hat{L}(\bar{x},\bar{\lambda}).
\end{aligned}$$

Điều này cùng với (4.7) dẫn đến $(\bar{x},\bar{\lambda})$ là điểm yên của hàm $\hat{L}$. □

Ví dụ 4.1. Xét bài toán (P)

$$\min f(x)=x_1+x_2$$

sao cho $g_t(x)=x_1-x_2+1-t\le 0, \forall t\in T=[0,1]$,

$$H_1(x)=-x_1^2-x_2^2+1\ge 0,$$
$$G_1(x)H_1(x)=x_2\left(-x_1^2-x_2^2+1\right)\le 0.$$

Miền khả thi có dạng:

$$\Omega=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x_2\le 1, x_1=-\sqrt{1-x_2^2}\right\}.$$

Chọn $\bar{x}=(-1,0)\in\Omega$ và $\bar{\lambda}=\left(\bar{\lambda}_0^g,\bar{\lambda}_1^H,\bar{\lambda}_1^G\right)=(1,1,0)$, ta có được $\bar{x}$ là điểm VC-dừng của bài toán (P), trong đó $I_g(\bar{x})=\{0\}, I_+(\bar{x})=I_{0+}(\bar{x})=I_{0-}(\bar{x})=\varnothing$ và $I_{00}(\bar{x})=\{1\}$. Hơn nữa, chúng ta có thể kiểm tra được $f, g_t\left(t\in I_g^+(\bar{x})\right), -H_1, G_1$ là các hàm lồi tại $\bar{x}$, nghĩa là các điều kiện của Mệnh đề 4.2 được thỏa mãn tại $\bar{x}$. Ngoài ra, do

$$\begin{aligned}
\hat{L}(x,\lambda) &= x_1+x_2+\lambda_0^g\left(x_1-x_2+1\right)\\
&\quad -\lambda_1^H\left(-x_1^2-x_2^2+1\right)+\lambda_1^G x_2,
\end{aligned}$$

Ta có

$$\hat{L}(\bar{x},\lambda) = \hat{L}(\bar{x},\bar{\lambda}) = -1, \hat{L}(x,\bar{\lambda}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1.$$

Do đó,

$$\hat{L}(\bar{x},\lambda) \le \hat{L}(\bar{x},\bar{\lambda}) \le \hat{L}(x,\bar{\lambda}), \forall x \in \Omega, \forall \lambda \in \Omega_{D_L(\bar{x})}$$

Vì thế, kết luận của Mệnh đề 4.2 được kiểm tra.

5. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, bài toán tối ưu nửa vô hạn với ràng buộc biến mất được khảo sát. Các đối ngẫu dạng Lagrange cho bài toán này được thiết lập và mối quan hệ đối ngẫu theo các giả thiết lồi được khảo sát. Bên cạnh đó, các điều kiện tối ưu dạng điểm yên cho bài toán tối ưu nửa vô hạn với ràng buộc biến mất cũng được thiết lập. Các kết quả trên là cơ sở cho sự mở rộng nghiên cứu đối ngẫu dạng Lagrange và điều kiện tối ưu dạng điểm yên cho bài toán tối ưu đa mục tiêu nửa vô hạn với ràng buộc biến mất trong tương lai.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Achtziger, W., & Kanzow, C. (2008). Mathematical programs with vanishing constraints: optimality conditions and constraint qualifications, *Mathematical Programming, 114*(1), 69–99. https://doi.org/10.1007/s10107-006-0083-3

Caristi, G., & Ferrara, M. (2017). Necessary conditions for nonsmooth multiobjective semiinfinite problems using Michel–Penot subdifferential, *Decisions in Economics and Finance, 40*(1-2), 103–113. https://doi.org/10.1007/s10203-017-0186-8

Chuong, T. D., & Jeyakumar, V. (2017). Convergent hierarchy of SDP relaxations for a class of semi-infinite convex polynomial programs and applications. *Applied Mathematics and Computation, 315*, 381–399. https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.07.076

Ghate, A. (2020). Inverse optimization in semi-infinite linear programs, *Operations Research Letters, 48*(3), 278–285. https://doi.org/10.1016/j.orl.2020.02.007

Guu, S. M., Singh, Y., & Mishra, S. K. (2017). On strong KKT type sufficient optimality conditions for multiobjective semi-infinite programming problems with vanishing constraints. *Journal of Inequalities and Applications, 2017*, 1–9. https://doi.org/10.1186/s13660-017-1558-x

Kabgani, A., & Soleimani-damaneh, M. (2018). Characterization of (weakly/ properly/ robust) efficient solutions in nonsmooth semi-infinite multiobjective optimization using convexificators, *Optimization 67*(2), 217–235. https://doi.org/10.1080/02331934.2017.1393675

Kanzi, N. (2015). On strong KKT optimality conditions for multiobjective semi-infinite programming problems with Lipschitzian data, *Optimization Letters, 9*(6), 1121–1129. https://doi.org/10.1007/s11590-014-0801-3

Mishra, S. K., Singh, V. & Laha, V. (2016). On duality for mathematical programs with vanishing constraints, *Annals of Operations Research, 243*(1-2), 249–272. https://doi.org/10.1007/s10479-015-1814-8

Pandey, Y., & Mishra, S. (2016). On strong KKT type sufficient optimality conditions for nonsmooth multiobjective semi-infinite mathematical programming problems with equilibrium constraints, *Operations Research Letters, 44*(1), 148–151. https://doi.org/10.1016/j.orl.2015.12.007

Singh, Y., Pandey, Y., & Mishra, S. K. (2017). Saddle point optimality criteria for mathematical programming problems with equilibrium constraints, *Operations Research Letters, 45*(3), 254–258. https://doi.org/10.1016/j.orl.2017.03.009

Singh, K. V. K., Maurya, J. K., & Mishra, S. K. (2019). Lagrange duality and saddle point optimality conditions for semi-infinite mathematical programming problems with equilibrium constraints, *Yugoslav Journal of Operations Research, 29*(4), 433–448. https://doi.org/10.2298/YJOR181215014S

Tung, L. T. (2018). Strong Karush–Kuhn–Tucker optimality conditions for multiobjective semi-infinite programming via tangential subdifferential, *RAIRO - Operations Research, 52*(4-5), 1019–1041. https://doi.org/10.1051/ro/2018020

Tung, L. T. (2020a). Karush–Kuhn–Tucker optimality conditions and duality for convex semi-infinite programming with multiple interval-valued objective functions, *Journal of Applied Mathematics and Computing, 62*, 67–91. https://doi.org/10.1007/s12190-019-01274-x

Tung, L. T. (2020b). Karush–Kuhn–Tucker optimality conditions and duality for multiobjective semi-infinite programming problems with vanishing constraints, *Annals of Operations Research.* https://doi.org/10.1007/s10479-020-03742-1

Tung, L. T. (2020c). Karush–Kuhn–Tucker optimality conditions and duality for the semi-infinite programming problems with vanishing constraints, *Journal of Nonlinear and Variational Analysis, 4*(3), 319-336. https://doi.org/10.23952/jnva.4.2020.3.01

Vaz, A. I. F., Fernandes, E. M., & Gomes, M. P. S. (2004). Robot trajectory planning with semiinfinite programming, *European Journal of Operational Research, 153*(3), 607–617. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(03)00266-2