

DOI:10.22144/ctu.jvn.2022.098

# MÔ HÌNH ĐẠO HÀM PHÂN THỨ CHO SỰ LAN TRUYỀN COVID-19 VỚI BIỆN PHÁP CÁCH LY

Nguyễn Hữu Khánh<sup>1\*</sup>, Lương Thị Thảo Tâm<sup>1</sup> và Lâm Duy Nhất<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ

<sup>2</sup>Trường THCS và THPT Long Bình, An Phú, An Giang

\*Người chịu trách nhiệm về bài viết: Nguyễn Hữu Khánh (email: nhkhanh@ctu.edu.vn)

### Thông tin chung:

Ngày nhận bài: 17/05/2022

Ngày nhận bài sửa: 03/06/2022

Ngày duyệt đăng: 16/06/2022

### Title:

Fractal order derivative model for Transmission of COVID-19 with quarantine measure

### Từ khóa:

Đạo hàm phân thứ, điểm cân bằng bệnh, điểm cân bằng tự do, ổn định địa phương, ổn định cận định đều

### Keywords:

Disease free equilibrium, endemic equilibrium, fractal order derivative, local stability, uniform asymptotic stability

### ABSTRACT

This article studies a transmission of COVID-19 by fractal order derivative. The transmission is decided by the basic reproduction number  $R_0$  and the stability of equilibria. Local stability is determined by eigenvalue method. Uniform asymptotically stability was proved by Lyapunov function method and LaSalle's invariance principle. We show that for  $R_0 < 1$  then the free equilibrium is local stable and uniform asymptotic stable and for  $R_0 > 1$  then the endemic equilibrium is local stable and uniform asymptotic stable. Transcritical bifurcation is used to explain the mechanism of the transmission. Numerical simulation is carried out to verify theory results.

### TÓM TẮT

Bài báo nghiên cứu sự lan truyền của COVID-19 bằng đạo hàm phân thứ. Sự lan truyền được quyết định bởi số sinh sản cơ bản  $R_0$  và tính ổn định của các điểm cân bằng. Tính ổn định địa phương được xác định bằng phương pháp giá trị riêng. Tính ổn định tiệm cận đều được chứng minh bằng phương pháp hàm Lyapunov và nguyên lý bất biến Lasalle. Chúng tôi chỉ ra rằng khi  $R_0 < 1$  thì điểm cân bằng tự do ổn định địa phương và tiệm cận đều và khi  $R_0 > 1$  thì điểm cân bằng bệnh ổn định địa phương và tiệm cận đều. Phân nhánh Transcritical được dùng để giải thích cơ chế của sự lan truyền. Mô phỏng số được thực hiện để kiểm chứng các kết quả lý thuyết.

## 1. GIỚI THIỆU

Sự bùng nổ của dịch bệnh viêm đường hô hấp cấp do virus Corona, đặc biệt là COVID-19, là vấn đề mà mọi người trên toàn thế giới đang quan tâm (Khan & Atangana, 2020). Nhiều nhân tố phức tạp của sự lan truyền do virus này gây nên như nguồn gốc của virus, sự lan truyền với tốc độ nhanh chóng, có nhiều biến thể mới và chưa có vắc-xin đặc chủng cho tất cả các loại virus. Chính vì vậy việc nghiên cứu mô hình lan truyền virus COVID-19 là vấn đề quan trọng cần được nghiên cứu.

Mô hình toán học là công cụ hiệu quả được dùng để nghiên cứu sự lan truyền virus. Năm 1927, Kermack and Mckendrick đề xuất phương pháp nghiên cứu bệnh truyền nhiễm bằng cách dùng hệ phương trình vi phân. Sau đó, nhiều mô hình tất định về sự lan truyền được nghiên cứu theo các đặc tính của virus và các phương pháp tiếp cận (Khanh, 2016).

Gần đây, đạo hàm phân thứ (cấp không nguyên) là công cụ hiệu quả được nhiều người sử dụng để

mô hình hóa các bài toán thực tế nhờ vào sự mô tả chính xác hơn và thể hiện thời gian nhớ của quá trình một cách chi tiết hơn (Ahmed & Elgazzar, 2007; Matignon, 1996; Sun et al., 2018). Đạo hàm phân thứ cho ta toàn bộ thông tin của khoảng thời gian nghiên cứu và nó được xem như chỉ số nhớ (memory index). Delavari and Baleanu (2012) mở rộng phương pháp hàm Lyapunov cho hệ phân thứ bằng cách dùng các bất đẳng thức Bihari và Bell-Gronwall và chứng minh định lý so sánh hệ phân thứ. Leon (2015) mở rộng hàm Lyapunov dạng Volterra để ước lượng đạo hàm Caputo cấp  $\alpha \in (0,1)$  và đưa ra phương pháp ổn định tiệm cận đều. Đạo hàm phân thứ đã được dùng cho rất nhiều mô hình lan truyền bệnh (Khan & Atangana, 2020; Sun et al., 2018).

Bài báo này phân tích sự lan truyền của COVID-19 bằng đạo hàm phân thứ Caputo. Đặc tính của mô hình là sự lan truyền xảy ra với tốc độ cao và có biện pháp cách ly. Mô hình cho bởi một hệ phương trình vi phân phân thứ phụ thuộc các tham số. Trong nghiên cứu này mô hình được xét là thuần nhất, tức là các tham số không đổi. Các tham số thực tế có thể nhận được qua thống kê trong cộng đồng. Động lực của mô hình được quyết định bởi số sinh sản cơ bản  $R_0$ . Do tính chất của đạo hàm phân thứ, chúng tôi dùng tính ổn định tiệm cận đều thay cho tính ổn định toàn cục đã được dùng trước đây cho các điểm cân bằng. Tính ổn định này được chứng minh bằng nguyên lý bất biến LaSalle và phương pháp hàm Lyapunov. Chúng tôi dùng phân nhánh Transcritical cùng với sự biến thiên của  $R_0$  theo các tham số để đưa ra biện pháp làm giảm sự lan truyền. Mô phỏng số được thực hiện bằng các phần mềm MatLab và AUTO để kiểm chứng các kết quả lý thuyết.

Phần còn lại của bài báo được sắp xếp trình tự như sau. Phần kế tiếp, giới thiệu về đạo hàm phân thứ Caputo và các kết quả sẽ được sử dụng trong bài báo. Phần 3 trình bày về mô hình và các tính chất. Phần 4 nghiên cứu về tính ổn định địa phương của các điểm cân bằng. Phần 5 khảo sát tính ổn định tiệm cận đều của các điểm cân bằng. Phần 6 thực hiện việc khảo sát số cho mô hình. Phần 7 đề xuất biện pháp kiểm soát sự lan truyền. Bài báo kết thúc với phần kết luận.

## 2. ĐẠO HÀM CAPUTO VÀ CÁC TÍNH CHẤT

Phần này giới thiệu về đạo hàm Caputo và một số tính chất sẽ sử dụng trong bài báo.

**Định nghĩa 1.** (Caputo, 2008) Cho  $a > 0, t > a$  và  $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$ . Đạo hàm phân thứ Caputo cấp  $\alpha$  của hàm  $f \in C^n$  cho bởi

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds,$$

trong đó  $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$ .

**Định nghĩa 2.** (Li et al., 2009) Hàm Mittag-Leffler tổng quát cho bởi công thức sau:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)},$$

trong đó  $n-1 \leq \alpha \leq n$ . Kí hiệu  $E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z)$ .

**Định lý 1.** (Diethelm, 2010) Cho  $0 < \alpha < 1$  và  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Nghiệm của bài toán giá trị biên

$$D_0^\alpha y(x) = \lambda y(x) + q(x),$$

$$y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, k = \overline{0, m-1},$$

trong đó  $q \in C[0, h]$  cho bởi

$$y(x) = y_0^{(0)} E_\alpha(\lambda x^\alpha) + \alpha \int_0^x q(x-t) t^{\alpha-1} E_\alpha(\lambda t^\alpha) dt.$$

**Định lý 2.** (Leon, 2015) Cho  $x(t)$  là hàm khả vi, liên tục và  $x(t) \in \mathbb{R}_+$ . Khi đó với mỗi  $t \geq t_0$  ta có

$${}^C D_{t_0}^\alpha \left( x(t) - x^* - x^* \ln \frac{x(t)}{x^*} \right) \leq \left( 1 - \frac{x^*}{x(t)} \right) {}^C D_{t_0}^\alpha x(t),$$

$$x^* \in \mathbb{R}_+, \forall \alpha \in (0,1).$$

Trong phần tiếp theo ta xét phương trình vi phân phân thứ tổng quát liên quan đến đạo hàm Caputo sau đây:

$${}^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \alpha \in (0,1) \quad (1)$$

với điều kiện ban đầu  $x_0 = x(t_0)$ .

**Định lý 3.** (Matignon, 1996) Điểm cân bằng  $x^*$  của hệ Caputo (1) ổn định tiệm cận địa phương nếu tất cả các giá trị riêng  $\lambda$  của ma trận Jacobi tại  $x^*$  thỏa điều kiện  $|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ .

**Định lý 4.** (Dalavari, 2012) Cho  $x^*$  là điểm cân bằng của hệ phân thứ (1) và  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  là miền chứa  $x^*$ . Giả sử  $L: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm khả vi liên tục sao cho

$$W_1(x) \leq L(t, x(t)) \leq W_2(x)$$

và

$${}^C D_t^\alpha L(t, x(t)) \leq -W_3(x)$$

với mọi  $\alpha \in (0,1)$  và  $x \in \Omega$ , trong đó  $W_1(x)$ ,  $W_2(x)$  và  $W_3(x)$  là các hàm xác định dương liên tục trên  $\Omega$ . Khi đó điểm cân bằng  $x^*$  ổn định tiệm cận đều trên  $\Omega$ .

### 3. MÔ HÌNH VÀ CÁC TÍNH CHẤT

#### 3.1. Cấu trúc của mô hình

Xét mô hình lan truyền COVID-19 trong cộng đồng với 4 nhóm sau đây:

- **(S)** (susceptible group): nhóm có khả năng bị nhiễm bệnh.
- **(I)** (infected group): nhóm bị nhiễm bệnh và có khả năng lây nhiễm sang nhóm (S).
- **(Q)** (quarantine group): nhóm cách ly từ các cá thể của nhóm (I).
- **(R)** (recovered group): nhóm bình phục từ các cá thể của nhóm (I) và (Q).

Gọi  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $Q(t)$  và  $R(t)$  lần lượt là số lượng cá thể của nhóm (S), (I), (Q) và (R) tại thời điểm  $t$ .

Ta xây dựng mô hình với các giả thiết sau đây:

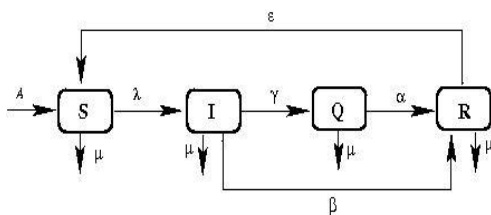
(H1) Các cá thể bên ngoài đi vào hệ thống với số lượng  $A$ . Tỷ lệ chết tự nhiên trong các nhóm như nhau và bằng  $\mu$ .

(H2) Các cá thể có khả năng bị nhiễm trong nhóm

(S) chuyển sang trạng thái bị nhiễm (I) với xác suất là  $\lambda$ .

(H3) Các cá thể bị nhiễm được cách ly với tỷ lệ  $\gamma$ , các cá thể bị cách ly được điều trị và bình phục với tỷ lệ là  $\alpha$  và khả năng các cá thể bình phục này trở lại trạng thái có khả năng bị nhiễm với tỷ lệ  $\varepsilon$ .

(H4) Các cá thể bị nhiễm cũng có thể tự hết nhiễm do kháng thể trong người và tạm thời hết bệnh với tỷ lệ  $\beta$ .



Hình 1. Biểu đồ dòng cho hệ

Mô hình lan truyền cho bởi hệ phương trình vi phân phân thứ như sau:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha S(t) = A - \lambda S(t)I(t) + \varepsilon R(t) - \mu S(t) \\ {}^C D_t^\alpha I(t) = \lambda S(t)I(t) - (\beta + \gamma + \mu)I(t) \\ {}^C D_t^\alpha Q(t) = \gamma I(t) - (\alpha + \mu)Q(t) \\ {}^C D_t^\alpha R(t) = \beta I(t) + \alpha Q(t) - (\varepsilon + \mu)R(t), \end{cases} \quad (2)$$

với các tham số là tỷ số chuyển tiếp qua các trạng thái và

$$S(t) + I(t) + Q(t) + R(t) = N(t), \quad \forall t$$

trong đó  $N(t)$  là tổng số người trong hệ thống (cộng đồng đang xét).

#### 3.2. Miền bất biến

Định lí sau chứng minh miền bất biến của hệ (2).

• **Định lí 5.** Tất cả các thành phần nghiệm  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $Q(t)$  và  $R(t)$  của hệ (2) bị chặn trong miền

$$\Omega = \{(S, I, Q, R) : S, I, Q, R > 0, S + I + Q + R \leq \frac{A}{\mu}\}.$$

Chứng minh. Từ hệ (2) ta có

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha N(t) &= A - \mu(S(t) + I(t) + Q(t) + R(t)) \\ &= A - \mu N(t). \end{aligned}$$

Dùng phép biến đổi Laplace và áp dụng Định lí 1, ta có

$$\begin{aligned} N(t) &\leq N(0)E_\alpha(-\mu t^\alpha) + \int_0^t A s^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\mu s^\alpha) ds \\ &= N(0)E_\alpha(-\mu t^\alpha) + \int_0^t A s^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mu^k s^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + \alpha)} ds \\ &= \frac{A}{\mu} + E_\alpha(-\mu t^\alpha) \left( N(0) - \frac{A}{\mu} \right). \end{aligned}$$

Khi  $N(0) \leq \frac{A}{\mu}$ , vì  $E_\alpha(-\mu t^\alpha) \geq 0$  (xem  $E_\alpha$  trong

Định nghĩa 2) nên  $N(t) \leq \frac{A}{\mu}$ . Suy ra

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (S + I + Q + R) \leq \frac{A}{\mu}.$$

Do đó, ta có miền bất biến của hệ (2) là

$$\Omega = \{(S, I, Q, R) : S, I, Q, R > 0, S + I + Q + R \leq \frac{A}{\mu}\}.$$

#### 3.3. Các điểm cân bằng

Tọa độ của các điểm cân bằng là nghiệm của hệ ứng với vế phải của (2) bằng 0. Giải hệ này tìm được

hai điểm cân bằng trong hệ tọa độ  $(S, I, Q, R)$  như sau:

Điểm cân bằng tự do  $P_0(\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0)$ .

Điểm cân bằng bệnh  $P_1(S^*, I^*, Q^*, R^*)$ , trong đó  $S^* > 0, I^* > 0, Q^* > 0, R^* > 0$  và

$$S^* = \frac{\beta + \gamma + \mu}{\lambda}, \quad I^* = \frac{(\varepsilon + \mu)(\alpha + \mu)G}{\lambda F},$$

$$Q^* = \frac{\gamma(\varepsilon + \mu)G}{\lambda F}, \quad R^* = \frac{(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\mu)G}{\varepsilon\lambda F},$$

với

$$G = \lambda A - \mu(\beta + \gamma + \mu), \quad (3)$$

$$F = \mu[\alpha(\beta + \varepsilon + \gamma + \mu) + \beta\mu + (\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)]. \quad (4)$$

Ta thấy điểm cân bằng tự do  $P_0$  luôn tồn tại với mọi giá trị của các tham số. Khi  $R_0 = \frac{\lambda A}{\mu(\beta + \gamma + \mu)} > 1$ , ta có  $G > 0$ . Điều này suy ra điểm cân bằng địa phương  $P_1$  tồn tại với  $R_0 > 1$ .

### 3.4. Số sinh sản cơ bản

Trong dịch tễ học, *số sinh sản cơ bản*, kí hiệu  $R_0$ , là số trường hợp nhiễm bệnh mới dự kiến được tạo ra trực tiếp bởi một trường hợp nhiễm bệnh ban đầu. Đây là giá trị ngưỡng cho biết sự lan truyền tồn tại hay không trong cộng đồng. Chúng tôi dùng phương pháp được đề xuất bởi Driessche & Watmough (2002) để tìm  $R_0$ .

Mô hình (2) luôn có điểm cân bằng tự do  $P_0(\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0)$ . Cho  $x = (I, Q, S, R)^T$ . Mô hình (2) có thể viết lại thành

$$\frac{dx}{dt} = \bar{F}(x) - \bar{V}(x),$$

trong đó

$$\bar{F}(x) = \begin{pmatrix} \lambda SI \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{V}(x) = \begin{pmatrix} (\beta + \gamma + \mu)I \\ -\gamma I + (\alpha + \mu)Q \\ -A + \lambda SI - \varepsilon R + \mu S \\ -\beta I - \alpha Q + (\varepsilon + \mu)R \end{pmatrix}.$$

Ta tìm được

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial I} & \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial Q} \\ \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial I} & \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A & 0 \\ \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial I} & \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial Q} \\ \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial I} & \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta + \gamma + \mu & 0 \\ -\gamma & \alpha + \mu \end{pmatrix}.$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta + \gamma + \mu} & 0 \\ \frac{\gamma}{(\beta + \gamma + \mu)(\alpha + \mu)} & \frac{1}{\alpha + \mu} \end{pmatrix}.$$

Ma trận thế hệ thứ hai của mô hình (2) là

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda A}{\mu(\beta + \gamma + \mu)} & \frac{\gamma}{\beta + \gamma + \mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bán kính phổ của ma trận  $FV^{-1}$  là  $\rho(FV^{-1}) = \frac{\lambda A}{\mu(\beta + \gamma + \mu)}$ . Theo Định lý 2 trong (Driessche & Watmough, 2002), số sinh sản cơ sở của hệ (2) được tính bởi  $R_0 = \rho(FV^{-1})$ . Do đó

$$R_0 = \frac{\lambda A}{\mu(\beta + \gamma + \mu)}.$$

Chú ý là khi  $R_0 > 1$  thì  $G = \lambda A - \mu(\beta + \gamma + \mu) > 0$  và điểm cân bằng bệnh  $P_1$  tồn tại.

## 4. TÍNH ỔN ĐỊNH ĐỊA PHƯƠNG CỦA CÁC ĐIỂM CÂN BẰNG

### 4.1. Tính ổn định địa phương của điểm cân bằng tự do

Tính ổn định địa phương của điểm cân bằng tự do  $P_0$  được tìm bằng phương pháp xét dấu các giá trị riêng của ma trận Jacobi tại  $P_0$ .

**Định lý 6.** Điểm cân bằng tự do  $P_0$  ổn định địa phương khi  $R_0 < 1$  và không ổn định khi  $R_0 > 1$ .

*Chứng minh.* Ma trận Jacobi tại  $P_0$  được cho bởi

$$J_{P_0} = \begin{pmatrix} -\mu & \frac{\lambda A}{\mu} & \omega & \varepsilon \\ 0 & \frac{\lambda A}{\mu} - (\beta + \gamma + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -(\alpha + \mu + \omega) & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & -(\varepsilon + \mu) \end{pmatrix}.$$

Giá trị riêng của ma trận này là

$$\lambda_1 = -\mu, \quad \lambda_2 = -(\varepsilon + \mu), \quad \lambda_3 = -(\alpha + \mu)$$

$$\text{và } \lambda_4 = \frac{\lambda A - \mu(\beta + \gamma + \mu)}{\mu} \equiv \frac{G}{\mu}.$$

Đề ý là các giá trị riêng  $\lambda_1, \lambda_2$  và  $\lambda_3$  luôn âm. Nếu  $R_0 < 1$  thì  $G < 0$ . Suy ra  $\lambda_4 < 0$ . Trường hợp này các giá trị riêng  $\lambda$  thỏa  $|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$  nên theo Định lí 3 ta suy ra  $P_0$  ổn định tiệm cận địa phương. Còn khi  $R_0 > 1$  thì  $\lambda_4 > 0$  nên  $P_0$  không ổn định.

**4.2. Tính ổn định địa phương của điểm cân bằng bệnh**

Tính ổn định địa phương của điểm cân bằng địa phương được chứng minh bởi tiêu chuẩn Routh-Hurwitz.

**Định lí 7.** Điểm cân bằng bệnh  $P_1$  của hệ (2) ổn định địa phương trong  $\Omega$  khi  $R_0 > 1$ .

*Chứng minh.* Ma trận Jacobi tại  $P_1$  được cho bởi

$$J_{P_1} = \begin{pmatrix} -\lambda I^* - \mu & -\lambda S^* & \omega & \varepsilon \\ \lambda I^* & K & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -(\alpha + \mu + \omega) & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & -(\varepsilon + \mu) \end{pmatrix}.$$

trong đó  $K = \lambda S^* - (\beta + \gamma + \mu)$ .

Phương trình đặc trưng là

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0;$$

với

$$\begin{aligned} a_0 &= \mu(\varepsilon + \mu)(\alpha + \mu) \times \\ &\times [\alpha(\beta + \varepsilon + \gamma + \mu) + \beta\mu + (\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)]L, \\ a_1 &= (\varepsilon + \mu)(\alpha + \mu) [\mu + 3\mu^2L + 2\mu(\alpha + \beta + \varepsilon + \gamma)L \\ &\quad + (\beta + \varepsilon(1 + \gamma) + \alpha(\beta + \varepsilon + \gamma) + \alpha)L], \\ a_2 &= \alpha(\varepsilon + 2\mu) + (2\varepsilon + 3\mu)\mu \\ &\quad + (\varepsilon + \mu)(\alpha + \mu)(\alpha + \beta + \varepsilon + \gamma + 3\mu)L, \\ a_3 &= \alpha + \varepsilon + 3\mu + (\varepsilon + \mu)(\alpha + \mu)L, \end{aligned}$$

trong đó,  $L = \frac{G}{F}$  và  $F, G$  được cho trong phương trình (3) và (4).

Theo Ahmed & Elgazzar (2007) và tiêu chuẩn Routh-Hurwitz, điểm cân bằng địa phương  $P_1$  là ổn định tiệm cận địa phương khi

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_3 > 0 \text{ và } a_1a_2a_3 - a_1^2 - a_0a_3^2 > 0.$$

Dễ thấy rằng  $a_0 > 0, a_1 > 0$  và  $a_3 > 0$ . Bằng cách sử dụng phần mềm Mathematica, điều kiện  $a_1a_2a_3 - a_1^2 - a_0a_3^2 > 0$  này thỏa mãn khi  $R_0 > 1$ .

**4.3. Phân nhánh Transcritical**

Sự thay đổi của tính ổn định địa phương của các điểm cân bằng  $P_0$  và  $P_1$  có thể được giải thích bởi phân nhánh Transcritical. Trong lý thuyết phân nhánh, Transcritical là sự phân nhánh địa phương mà tại đó điểm cân bằng có giá trị riêng với phần thực biến thiên qua giá trị 0. Trong phân nhánh này, một điểm cân bằng tồn tại với mọi giá trị của tham số và không bao giờ bị triệt tiêu. Điểm cân bằng này hoán đổi tính ổn định với điểm cân bằng khác tại giá trị phân nhánh, nơi mà chúng gặp nhau.

Trong hệ ta đang xét, điểm cân bằng tự do  $P_0$  luôn tồn tại. Nó ổn định khi  $R_0 < 1$  và không ổn định khi  $R_0 > 1$ . Hơn nữa, điểm cân bằng địa phương  $P_1$  tồn tại trong trường hợp  $R_0 > 1$  và nó không ổn định. Nếu ta giả sử rằng  $P_1$  cũng tồn tại khi  $R_0 < 1$ , mặc dù không thực tế, thì sự phân nhánh trong mô hình (2) có thể xem như là một dạng phân nhánh Transcritical tại  $R_0 = 1$ .

**5. ỔN ĐỊNH TIỆM CẬN ĐỀU CỦA CÁC ĐIỂM CÂN BẰNG**

Trong phần này ta dùng phương pháp hàm Lyapunov kết hợp với kết quả của Định lí 4 để xác định tính ổn định tiệm cận đều của các điểm cân bằng.

**Định lí 8.** Nếu  $R_0 < 1$  thì điểm cân bằng tự do  $P_0$  ổn định tiệm cận đều.

*Chứng minh.* Ta xây dựng hàm Lyapunov như sau:

$$W(t) = \left( S - S_0 - S_0 \ln \frac{S(t)}{S_0} \right) + I(t) + a_1Q(t) + a_2R(t),$$

trong đó  $S_0 = \frac{A}{\mu}, a_1 = \frac{(\alpha + \mu)\lambda A(1 - R_0)}{2\mu R_0(\alpha\gamma + \beta(\alpha + \mu))} \geq 0$

và  $a_2 = \frac{\lambda A(1 - R_0)}{2\mu R_0(\alpha\gamma + \beta(\alpha + \mu))} \geq 0.$

Theo Định lí 2, ta có

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha W &\leq \left(1 - \frac{S_0}{S}\right) {}^C D_t^\alpha S + {}^C D_t^\alpha I + a_1 {}^C D_t^\alpha Q \\ &\quad + a_2 {}^C D_t^\alpha R \\ &= \left(1 - \frac{A}{\mu S}\right) (A - \lambda SI + \varepsilon R - \mu S) \\ &\quad + (\lambda SI - (\beta + \gamma + \mu)I) + a_1 (\gamma I - (\alpha + \mu)Q) \\ &\quad + a_2 (\beta I + \alpha Q - (\varepsilon + \mu)R) \\ &= \left(1 - \frac{A}{\mu S}\right) (A + \varepsilon R - \mu S) \\ &\quad + \left(\frac{\lambda A}{\mu} - (\beta + \gamma + \mu) + \gamma a_1 + \beta a_2\right) I \\ &\quad + (- (\alpha + \mu)a_1 + \alpha a_2) Q - a_2 (\varepsilon + \mu)R. \end{aligned}$$

Vi  $-(\gamma + \mu)a_1 + \alpha a_2 = 0$  nên ta có

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha W &\leq \left(1 - \frac{A}{\mu S}\right) (A + \varepsilon R - \mu S) \\ &\quad + \left(\frac{\lambda A}{\mu} - (\beta + \gamma + \mu) + \gamma a_1 + \beta a_2\right) I \\ &\quad - a_2 (\varepsilon + \mu)R. \end{aligned}$$

Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned} \gamma a_1 + \beta a_2 &= -\frac{1}{2} \frac{\lambda A}{\mu R_0} (R_0 - 1), \\ \beta + \gamma + \mu &= \frac{\lambda A}{\mu R_0} \quad \text{và} \quad \mu S \leq A. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{\lambda A}{\mu} - (\beta + \gamma + \mu) + \gamma a_1 + \beta a_2 &= \frac{\lambda A}{2\mu R_0} (R_0 - 1) \leq 0 \\ \text{và} \left(1 - \frac{A}{\mu S}\right) (A + \varepsilon R - \mu S) &\leq 0. \end{aligned}$$

Do đó  ${}^C D_t^\alpha W \leq 0, \forall t$  và  ${}^C D_t^\alpha W = 0$  xảy ra khi  $S = S_0, I = 0, Q = 0, R = 0$ . Do đó theo Định lí 4 ta suy ra điểm cân bằng tự do  $P_0$  ổn định tiệm cận đều khi  $R_0 < 1$ .

**Định lí 9.** Nếu  $R_0 > 1$  thì điểm cân bằng bệnh  $P_1$  ổn định tiệm cận đều với các tham số thích hợp.

*Chứng minh.* Xét hàm Lyapunov

$$\begin{aligned} V(t) &= \left(S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*}\right) + \left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*}\right) \\ &\quad + k_1 \left(Q - Q^* - Q^* \ln \frac{Q}{Q^*}\right) + k_2 \left(R - R^* - R^* \ln \frac{R}{R^*}\right), \end{aligned}$$

trong đó  $k_1, k_2 > 0$  thỏa  $k_1 \gamma + k_2 \beta + \lambda S^* < \beta + \gamma + \mu,$

$$\varepsilon / (\varepsilon + \mu) < k_2 < k_1 \left(1 + \frac{\mu}{\alpha}\right) \text{ và}$$

$$\varepsilon(S^* - R^*) + k_2 (\beta I^* + \alpha Q^* - (\alpha + \beta)R^*) < k_1 (I^* - Q^*).$$

Theo định lí 2, ta có

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha V &\leq \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) {}^C D_t^\alpha S + \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) {}^C D_t^\alpha I \\ &\quad + k_1 \left(1 - \frac{Q^*}{Q}\right) {}^C D_t^\alpha Q + k_2 \left(1 - \frac{R^*}{R}\right) {}^C D_t^\alpha R \\ &= \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) (N - \lambda SI + \varepsilon R - \mu S) \\ &\quad + \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) (\lambda SI - (\beta + \gamma + \mu)I) \\ &\quad + k_1 \left(1 - \frac{Q^*}{Q}\right) (\gamma I - (\alpha + \mu)Q) \\ &\quad + k_2 \left(1 - \frac{R^*}{R}\right) (\beta I + \alpha Q - (\varepsilon + \mu)R). \end{aligned}$$

Khai triển biểu thức trên, sử dụng kết quả  $S^*, I^*, Q^*, R^*$  là nghiệm của hệ (2) với vế phải bằng 0 và sau đó rút gọn ta nhận được bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha V &\leq (\mu S^* + \lambda S^* I^*) \left(2 - \frac{S}{S^*} - \frac{S^*}{S}\right) \\ &\quad + (\lambda S^* - (\beta + \gamma + \mu) + \gamma k_1 + \beta k_2) I \\ &\quad + (\alpha k_2 - (\alpha + \mu)k_1) Q + (\varepsilon - (\varepsilon + \mu)k_2) R \\ &\quad + \varepsilon(S^* - R^*) - (I^* - Q^*)k_1 + (\beta I^* + \alpha Q^* - (\alpha + \beta)R^*)k_2. \end{aligned}$$

Từ tính chất đã chọn của  $k_1, k_2$  và bất đẳng thức về trung bình cộng ta suy ra  ${}^C D_t^\alpha V \leq 0, \forall t$  và  ${}^C D_t^\alpha V = 0$  xảy ra khi  $S = S^*, I = I^*, Q = Q^*, R = R^*$ .

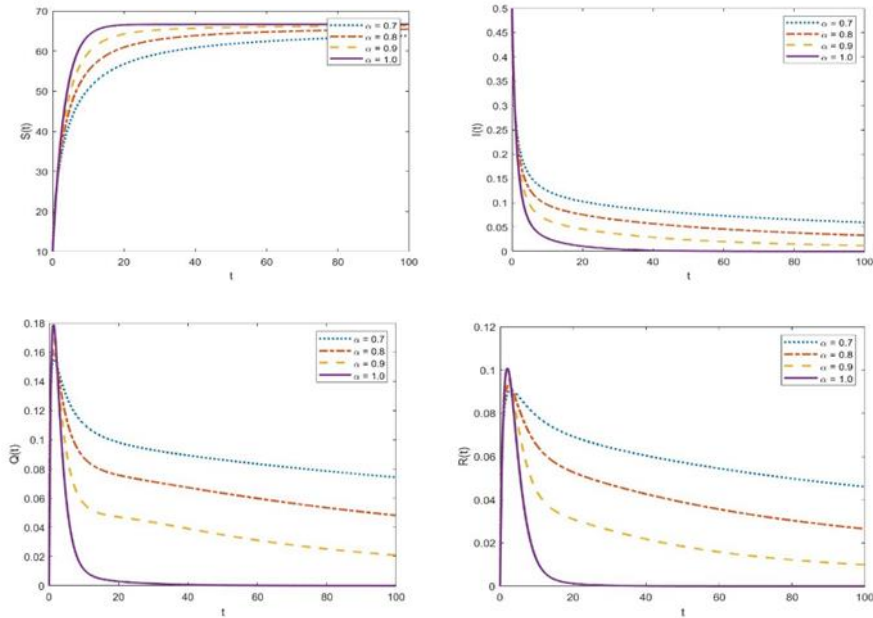
Do đó theo định lí 4 ta suy ra điểm cân bằng bệnh  $P_1$  ổn định tiệm cận đều khi  $R_0 > 1$ .

## 6. KHẢO SÁT SỐ

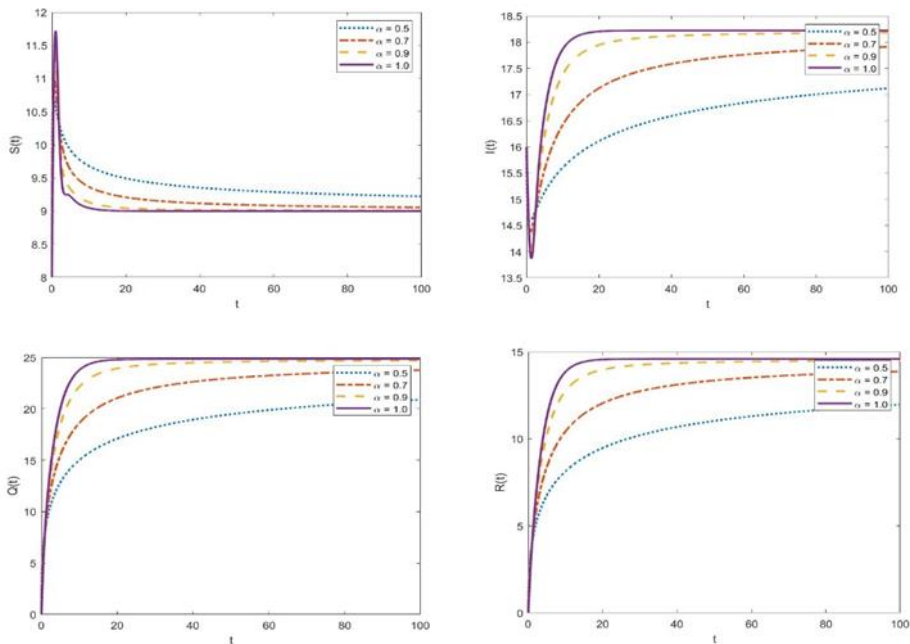
### 6.1. Mô phỏng mô hình

Trong phần này ta thực hiện mô phỏng số cho hệ (2). Đối với đạo hàm phân thứ, chúng tôi dùng phương pháp Adams-Bashforth-Mouton được hiện qua code fde12 (Garrappa, 2010). Sự hội tụ và tính chính xác của phương pháp số được trình bày bởi Diethelm (2004). Bộ tham số mô phỏng được chọn phù hợp với sự lan truyền COVID-19.

Hình 2 biểu diễn các thành phần nghiệm của mô hình (2) với cấp  $\alpha \in \{0.7, 0.8, 0.9, 1.0\}$  cho trường hợp  $R_0 < 1$ . Bộ tham số được chọn như sau:  $A = 75,$



**Hình 2.** Đồ thị các thành phần nghiệm  $S(t), I(t), Q(t), R(t)$  cho trường hợp  $R_0 < 1$



**Hình 3.** Đồ thị các thành phần nghiệm  $S(t), I(t), Q(t), R(t)$  cho trường hợp  $R_0 > 1$

$\alpha = 0.25, \beta = 0.3, \varepsilon = 0.5, \gamma = 0.85, \lambda = 0.2, \mu = 0.3$ . Ta tính được  $R_0 = 0.808 < 1$ . Trường hợp này, điểm cân bằng tự do  $P_0$  ổn định tiệm cận đều. Với điều kiện ban đầu  $S(0) = 1.0, I(0) = 0.5, Q(0) = 0, R(0) = 0$ . Thành phần nhiễm bệnh  $I(t)$  dần về 0 khi  $t \rightarrow \infty$ . Điều này cho thấy sự lan truyền tắt dần trong cộng đồng. Qua hình 2 ta thấy thành phần  $I$  (cả  $Q$  và

$R$ ) có giá trị giảm khi cấp đạo hàm  $\alpha$  tăng. Thành phần  $I$  ứng với  $\alpha = 1$  (trường hợp đạo hàm thông thường) giảm rất nhanh. Điều này không phù hợp lắm vì trong thực tế sự lan truyền sẽ giảm từ từ. Do đó dùng đạo hàm cấp  $\alpha < 1$  sẽ gần thực tế hơn.

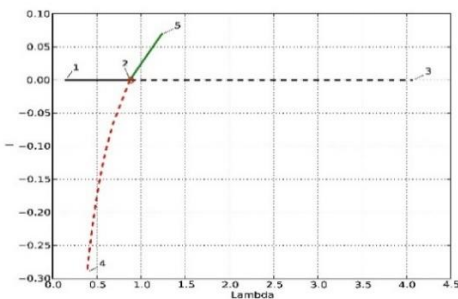
Hình 3 vẽ các thành phần nghiệm của mô hình (2) với cấp  $\alpha \in \{0.5, 0.7, 0.9, 1.0\}$  cho trường hợp

$R_0 > 1$ . Bộ tham số được chọn như sau:  $A = 75$ ,  $\alpha = 0.25$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\gamma = 0.8$ ,  $\lambda = 0.85$ ,  $\mu = 0.3$ . Ta tính được  $R_0 = 6.451 > 1$ . Trường hợp này, điểm cân bằng bệnh ổn định tiệm cận đều. Với điều kiện ban đầu  $S(0) = 1.0$ ,  $I(0) = 0.5$ ,  $Q(0) = 0$ ,  $R(0) = 0$ . Thành phần nhiễm bệnh  $I(t)$  dần về giá trị dương khi  $t \rightarrow \infty$ . Điều này cho thấy sự lan truyền vẫn còn trong cộng đồng. Từ hình 3 ta thấy thành phần I (cả Q và R) có giá trị tăng khi cấp đạo hàm  $\alpha$  tăng. Khi  $\alpha = 1$  (đạo hàm thông thường), thành phần I tăng trong khoảng thời gian ngắn và ổn định liền. Điều này không phù hợp lắm vì trong thực tế sự lan truyền tăng và sau khoảng thời gian dài mới bắt đầu ổn định. Do đó dùng đạo hàm cấp  $\alpha < 1$  sẽ gần thực tế hơn.

**6.2. Phân nhánh Transcritical**

Dùng gói phần mềm AUTO (Doedel et al., 2000) ta có thể phát hiện phân nhánh Transcritical xảy ra trong mô hình (2).

Cho  $A = 100$ ,  $\alpha = 0.35$ ,  $\beta = 0.015$ ,  $\varepsilon = 0.25$ ,  $\gamma = 0.025$ ,  $\mu = 0.19$  và cho tham số  $\lambda$  thay đổi, ta thấy phân nhánh Transcritical xảy ra tại  $\lambda = 0.814$ . Biểu đồ phân nhánh trường hợp này cho trong Hình 4. Trong Hình 4, đường đi qua các nghiệm 1, 2 và 3 là đường của điểm cân bằng tự do  $P_0$ , còn đường qua các nghiệm 4, 2 và 5 là đường của điểm cân bằng bệnh  $P_1$ . Đường liền nét thể hiện tính ổn định, còn đường đứt nét thể hiện không ổn định. Phân nhánh Transcritical xảy ra tại nghiệm 2, tương ứng với  $R_0 = 1$  và giá trị phân nhánh nhận được là  $\lambda = 0,814$ . Khi  $\lambda$  đi qua giá trị này thì  $P_0$  chuyển từ ổn định sang không ổn định, còn  $P_1$  từ không ổn định chuyển sang ổn định.



**Hình 4. Biểu đồ phân nhánh của hệ (2) theo  $\lambda$**

Các phân nhánh tương tự cũng nhận được khi cho các tham số khác thay đổi (cố định các tham số còn lại).

**7. ĐIỀU KHIỂN SỰ LAN TRUYỀN**

Trong phần này ta nghiên cứu phương pháp điều chỉnh các tham số gần bộ giá trị phân nhánh để số sinh sản cơ sở  $R_0 < 1$ , tức là làm cho sự lan truyền virus giảm dần trong cộng đồng.

Số sinh sản cơ sở cho bởi công thức

$$R_0 = \frac{\lambda A}{\mu(\beta + \gamma + \mu)}$$

Ta có

$$R_0'(\lambda) = \frac{A}{\mu(\beta + \gamma + \mu)} > 0: R_0 \text{ tăng theo } \lambda,$$

$$R_0'(\mu) = -\frac{\lambda A(\beta + \gamma + \mu)}{[\mu(\beta + \gamma + \mu)]^2} < 0: R_0 \text{ giảm theo } \mu,$$

$$R_0'(\beta) = -\frac{\lambda A \mu}{[\mu(\beta + \gamma + \mu)]^2} < 0: R_0 \text{ giảm theo } \beta,$$

$$R_0'(\gamma) = -\frac{\lambda A \mu}{[\mu(\beta + \gamma + \mu)]^2} < 0: R_0 \text{ giảm theo } \gamma.$$

Dùng phần mềm AUTO ta xác định được bộ giá trị nhân nhánh ( $\beta_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$ ) ứng với  $R_0 = 1$ . Với các giá trị tham số gần bộ trên, dựa vào tính đơn điệu của  $R_0$  ta có thể điều chỉnh các tham số thích hợp để có  $R_0 < 1$ , tức là sự lan truyền được giảm đi.

**8. KẾT LUẬN**

Bài báo đã khảo sát mô hình lan truyền COVID-19 với công cụ đạo hàm phân thứ Caputo. Miền có thể của nghiệm, các điểm cân bằng và số sinh sản cơ sở được xác định. Sự lan truyền virus được quyết định bởi tính ổn định của các điểm cân bằng và số sinh sản cơ sở  $R_0$ . Chúng tôi chứng minh được khi  $R_0 < 1$  thì sự lan truyền tắt dần, còn khi  $R_0 > 1$  thì sự lan truyền vẫn còn. Dựa vào sự biến thiên của  $R_0$  theo các tham số và giá trị phân nhánh Transcritical ta có thể điều chỉnh các tham số để sự lan truyền giảm đi. Khảo sát số cho thấy đạo hàm phân thứ cho kết quả chi tiết và thực tế hơn về sự thay đổi của các trạng thái theo thời gian.



## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Ahmed, E., & Elgazzar, A. (2007). On fractional order differential equations model for nonlocal epidemics. *Physica A*, 379, 607-614. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2007.01.010>
- Caputo, M. (2008). Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent. *Fractalional Calculus and Applied Analysis*, 11(1), 529-539. <https://doi.org/10.1111/j.1365246X.1967.tb02303.x>
- Delavari, H. N., & Baleanu D. (2012). Stability analysis of Caputo fractional-order nonlinear system revisited. *Nonlinear Dynamics*, 67(4), 2433-2439. <https://doi.org/10.1007/s11071-011-0157-5>
- Diethelm, K. A. (2010). *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-14574-2>
- Diethelm, K., Ford, N. J., & Fredd, A. D. (2004). Detail error analysis for a fractal Adams method. *Numerical Algorithms*, 36(1), 31-52. <https://doi.org/10.1023/B:NUMA.0000027736.85078.be>
- Doedel, E. J., Paffenroth, R. C., & Kuznetsov, I. A. (2000). AUTO 2000: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations, <http://sourceforge.net/projects/auto2000/>.
- Driessche, P., & Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 180, 29-48. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6)
- Garrappa, R. (2010). Predictor-corrector PECE method for fractional differential equations, *MATLAB Central File Exchange*, File ID: 32918.
- Kermack, W. O., & McKendrick, A. G. (1927). Contribution to mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal society A*, 115, 700-721. <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>
- Khan, M., & Atangana, A. (2020). Modeling the dynamic of novel coronavirus (2019-nCov) with fractional derivative. *Alexandria Engineering Journal*, 59(4), 2379-2389. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.02.033>
- Khanh, N. H. (2016). Stability analysis of an influenza virus model with disease resistance. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 24, 193-199.
- Leon, C. V. D. (2015). Voltage-type Lyapunov function for fractional order epidemic systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 24, 75-85. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.12.013>
- Li, Y., Chen, Y. Q., & Podlubny, I. (2009). Mittag-Leffler stability of fractal order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 45(8), 1965-1969. <https://doi.org/10.1016/j.automata.2009.04.003>
- Matignon, D. (1996). Stability results for fractional differential equations to control processing. *Computational Engineering in System Applications*. In: Multiconference, IMACS, IEEE-SMC, 2.Litle, France: IEEE Xplore 963-958.
- Sun, H. G., Jang, H., Baleanu, D., Chen, W., & Chen, Y.Q. (2018). A new collection of real world applications of fractal calculus in science and engineering. *Communications in Nonlinear Science and Numerical simulation*, 59(5), 213-231. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.04.019>