Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/jvn.2017.061

SỰ HỘI TỤ CỦA DÃY LẶP HỖN HỢP KIỂU ISHIKAWA CHO HỌ ÁNH XẠ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN (E_μ) TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Nguyễn Trung Hiếu và Trương Cẩm Tiên
Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 15/02/2017
Ngày nhận bài sửa: 09/04/2017
Ngày duyệt đăng: 27/06/2017

Title:
Some covergences by the hybird Ishikawa iteration for a family of mappings satisfying condition (E_μ) in Hilbert spaces

Từ khóa:
Ánh xạ đóng đều, ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ), dãy lặp hỗn hợp kiểu Ishikawa, không gian Hilbert, sự hội tụ mạnh

Keywords:
Hilbert space, hybird Ishikawa iteration, mapping satisfying condition (E_μ), strong convergence, uniformly closed mapping

ABSTRACT

In this paper, a convergence theorem by the hybird Ishikawa iteration for a family of mappings satisfying condition (E_μ) in Hilbert spaces is established. Also, some results for the convergence of the hybird Ishikawa iteration for nonexpansive mappings and mappings satisfying condition (E_μ) in Hilbert spaces are derived from the obtained theorem. In addition, an example is given to illustrate the convergence for the hybird Ishikawa iteration for a mapping satisfying condition (E_μ) in Hilbert spaces.

TÓM TẮT

Bài báo này, một định lí về sự hội tụ của dãy lặp hỗn hợp kiểu Ishikawa cho họ ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) trong không gian Hilbert được thiết lập, từ đó suy ra một số kết quả về sự hội tụ của dãy lặp hỗn hợp kiểu Ishikawa cho ánh xạ không giãn và ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ). Đồng thời, nghiên cứu cũng xây dựng ví dụ minh họa cho sự hội tụ của dãy lặp kiểu Ishikawa cho ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) trong không gian Hilbert.

Trích dẫn: Nguyễn Trung Hiếu và Trương Cẩm Tiên, 2017. Sự hội tụ của dãy lặp hỗn hợp kiểu *Ishikawa* cho họ ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) trong không gian Hilbert. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 50a: 12-20.

1 GIỚI THIỆU

Trong lí thuyết điểm bất động, vấn đề xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ không giãn được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Chìa khóa quan trọng của những xấp xỉ là dãy lặp. Một số loại dãy lặp cơ bản đã được giới thiệu như dãy lặp Mann, dãy lặp Halpern, dãy lặp Ishikawa,… và nhiều kết quả về sự hội tụ yếu cũng như sự hội tụ (mạnh) của những dãy lặp này cho ánh xạ không giãn đã được thiết lập. Gần đây, một số tác giả nghiên cứu xây dựng những dãy lặp tổng quát hơn để nghiên cứu sự hội tụ mạnh của dãy lặp cho ánh xạ không giãn. Năm 2003, Nakajo và Takahashi đã giới thiệu phương pháp hình chiếu (phương pháp CQ) để xây dựng dãy lặp suy rộng từ dãy lặp Mann và được gọi là dãy lặp dạng hỗn hợp kiểu Mann, đồng thời thiết lập được sự hội tụ mạnh của dãy lặp này cho ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert. Năm 2008, Takahashi *et al.* đã mở rộng kết quả của Nakajo và Takahashi (2003) cho họ ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert và đề xuất một mở rộng của dãy lặp hỗn hợp kiểu Mann bằng cách bớt đi tập Q_n trong dãy lặp của Nakajo và Takahashi (2003) . Năm 2006, Martinez-Yanes và Xu đã sử dụng phương pháp CQ để xây dựng dãy lặp hỗn hợp kiểu Halpern và dãy lặp hỗn hợp kiểu Ishikawa, đồng thời thiết lập được sự hội tụ (mạnh) của những loại dãy lặp này cho ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert. Sau đó, một số mở rộng của dãy lặp hỗn hợp kiểu Halpern và dãy lặp hỗn hợp kiểu Ishikawa cho ánh xạ không giãn có mối liên hệ tiệm cận trong không gian Banach đã được thiết lập (Kim, 2008; Qin *et al.*, 2008).

Bên cạnh việc xây dựng những dãy lặp tổng quát, một số tác giả cũng giới thiệu những mở rộng của ánh xạ không giãn. Năm 2008, Suzuki đã giới thiệu một mở rộng của ánh xạ không giãn và được gọi là ánh xạ thỏa mãn điều kiện *(C)* và thiết lập một số kết quả ban đầu về sự hội tụ cho ánh xạ thỏa mãn điều kiện *(C)*. Năm 2011, Garcia-Falset *et al.* đã giới thiệu một tổng quát của ánh xạ thỏa mãn điều kiện *(C)* và được gọi là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ). Đồng thời, một số kết quả ban đầu về sự hội tụ cho ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ). cũng được thiết lập (Bagherboum, 2016). Tuy nhiên, nhiều kết quả về sự hội tụ của dãy lặp dạng hỗn hợp cho ánh xạ không giãn chưa được khảo sát cho ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ).

Trong bài báo này, bằng cách bớt đi tập Q_n trong dãy lặp kiểu Ishikawa của (Martinez-Yanes và Xu, 2006), nghiên cứu mở rộng kết quả chính về sự hội tụ của dãy lặp dạng hỗn hợp kiểu Ishikawa cho ánh xạ không giãn trong (Martinez-Yanes và Xu, 2006) sang họ ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) trong không gian Hilbert. Từ đó, nghiên cứu đưa ra một số kết quả về sự hội tụ của dãy lặp cho ánh xạ không giãn và ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ). Đồng thời, bài báo cũng xây dựng ví dụ minh họa cho sự hội tụ của dãy lặp kiểu Ishikawa cho ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) trong không gian Hilbert.

Trước hết, nghiên cứu trình bày một số khái niệm và kết quả được sử dụng trong bài viết này. Những khái niệm và kết quả này được trích ra từ những kết quả trong (Martinez-Yanes và Xu, 2006; Marino và Xu, 2007; Garcia-Falset *et al.*, 2011; Zhang *et al.*, 2014).

Bổ đề 1.1. *Cho* H *là một không gian Hilbert thực. Khi đó, với mọi* $u, v \in H$ *và* $\lambda \in [0,1]$, *ta có*

$$\begin{aligned} ||u-v||^2 &= ||u||^2 + ||v||^2 - 2\langle u, v\rangle \\ &= ||u||^2 - ||v||^2 - 2\langle u-v, v\rangle. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} ||\lambda u + (1-\lambda)v||^2 &= \lambda||u||^2 + (1-\lambda)||v||^2 \\ &-\lambda(1-\lambda)||u-v||^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Bổ đề 1.2. *Cho* H *là một không gian Hilbert thực và* C *là một tập con lồi đóng khác rỗng trong* H. *Khi đó, với mỗi* $x \in H$, *tồn tại duy nhất phần tử* $P_C x \in C$ *sao cho* $||x - P_C x|| = \inf\{||x-y|| : y \in C\}$. *Ta gọi ánh xạ* $P_C : H \to C$ *là phép chiếu từ* H *lên* C.

Bổ đề 1.3. *Cho* H *là một không gian Hilbert thực và* C *là một tập con lồi đóng khác rỗng trong* H. *Khi đó,* $z = P_C x$ *nếu và chỉ nếu* $\langle x - z, z - y\rangle \geq 0$ *với mọi* $y \in C$.

Bổ đề 1.4. *Cho* H *là một không gian Hilbert thực và* C *là một tập con lồi đóng trong* H. *Khi đó,* $D = \{v \in C : ||y-v||^2 \leq ||x-v||^2 + \langle z, v\rangle + a\}$ *là tập lồi và đóng với* $x, y, z \in H$ *và* $a \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.5. Cho H là một không gian Hilbert thực, C là một tập con khác rỗng trong H và $T : C \to C$ là một ánh xạ. Khi đó, ánh xạ T được gọi là một *ánh xạ không giãn* trong C nếu $||Tx - Ty|| \leq ||x - y||$ với mọi $x, y \in C$.

Định nghĩa 1.6. Cho H là một không gian Hilbert thực, C là một tập con khác rỗng trong H và $T : C \to C$ là một ánh xạ. Khi đó, ánh xạ T được gọi là thỏa mãn *điều kiện* (E_μ) trong C nếu tồn tại $\mu \geq 1$ sao cho $||x - Ty|| \leq \mu||x - Tx|| + ||x - y||$ với mọi $x, y \in C$.

Nhận xét 1.7. *Mỗi ánh xạ không giãn là một ánh xạ thỏa mãn điều kiện* (E_μ) *với* $\mu = 1$.

Ví dụ sau chứng tỏ rằng tồn tại ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) nhưng không là ánh xạ không giãn.

Ví dụ 1.8. Cho $\mathbb{R}$ là không gian định chuẩn với chuẩn giá trị tuyệt đối, $C = [0, 8]$ là tập con của $\mathbb{R}$ và ánh xạ $T : C \to C$ được xác định bởi

$Tx = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \neq 8 \\ 4 & \text{khi } x = 8. \end{cases}$ Khi đó, T là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) với $\mu = 2$ nhưng T không là ánh xạ không giãn. Thật vậy, với $x, y \in C$ ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $x = 8$ và $y = 8$. Ta có

$$||x - Ty|| = |8 - 4| = 4, \; ||x - Tx|| = |8 - 4| = 4, \; ||x - y|| = |8 - 8| = 0.$$

Khi đó, $||x - Ty|| = 4 \leq 8 = 2||x - Tx|| + ||x - y||$.

Trường hợp 2. $x \neq 8$ và $y \neq 8$. Ta có

$$||x - Ty|| = |x - 0| = x, \; ||x - Tx|| = |x - 0| = x, \; ||x - y|| = |x - y|.$$

Khi đó,

$$||x - Ty|| = x \leq 2x + |x - y| = 2||x - Tx|| + ||x - y||.$$

Trường hợp 3. $x = 8$ và $y \neq 8$. Ta có

$$||x - Ty|| = |8 - 0| = 8, \; ||x - Tx|| = |8 - 4| = 4, \; ||x - y|| = |8 - y|.$$

Khi đó,

$$||x - Ty|| = 8 \leq 8 + |8 - y| = 2||x - Tx|| + ||x - y||.$$

Trường hợp 4. $x \neq 8$ và $y = 8$. Ta có

$$||x - Ty|| = |x - 4|, \; ||x - Tx|| = |x - 0| = x, \; ||x - y|| = |x - 8|.$$

Khi đó,

$$||x - Ty|| = |x - 4| \leq 2x + |x - 8| = 2||x - Tx|| + ||x - y||.$$

Vậy $||x - Ty|| \leq 2||x - Tx|| + ||x - y||$ với mọi $x, y \in C$. Điều này có nghĩa là T thỏa mãn điều kiện (E_μ) trong C với $\mu = 2$. Mặt khác, T không là ánh xạ không giãn. Thật vậy, chọn $x = 8$ và $y = 5$, ta có $||Tx - Ty|| = 4 > 3 = ||x - y||$ hay T không là ánh xạ không giãn.

Cho ánh xạ $T : C \to C$ và kí hiệu $F(T) = \{x \in C : Tx = x\}$ là tập hợp điểm bất động của ánh xạ T, ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.9. Cho H là một không gian Hilbert thực, C là một tập con khác rỗng trong H và $T_n : C \to C$ là các ánh xạ thỏa mãn $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \varnothing$. Khi đó, họ $\{T_n\}$ được gọi là *đóng đều* nếu với $\{x_n\}$ là dãy trong C sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim_{n\to\infty} ||x_n - T_n x_n|| = 0$ thì $x \in F$.

2 CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

Trước hết, nghiên cứu thiết lập một số tính chất của tập $F(T)$ với T là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) trong không gian Hilbert thực.

Mệnh đề 2.1. *Cho H là một không gian Hilbert thực, C là một tập con đóng trong H và $T : C \to C$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ). Khi đó, $F(T)$ là tập đóng trong C. Hơn nữa, nếu C là tập lồi thì $F(T)$ cũng là tập lồi.*

Chứng minh. Lấy $\{z_n\} \subset F(T)$ sao cho $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in C$. Do T là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) nên $||z - Tz|| = ||z - z_n + z_n - Tz||$

$$\leq ||z_n - z|| + ||z_n - Tz||$$
$$\leq ||z_n - z|| + \mu||z_n - Tz_n|| + ||z_n - z||$$
$$= 2||z_n - z||.$$

Do $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ nên $||z - Tz|| = 0$. Điều này có nghĩa là $z = Tz$ hay $z \in F(T)$. Vậy $F(T)$ là tập đóng.

Giả sử C là tập lồi. Ta chứng minh $F(T)$ cũng là tập lồi. Với $\lambda \in [0,1]$ và $x, y \in F(T)$, ta chứng minh $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in F(T)$. Thật vậy, do T là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) nên

$$||x - Tz|| \leq \mu||x - Tx|| + ||x - z|| = ||x - z|| = ||x - \lambda x - (1-\lambda)y|| = (1-\lambda)||x - y||,$$
$$||y - Tz|| \leq \mu||y - Ty|| + ||y - z|| = |y - z|| = ||y - \lambda x - (1-\lambda)y|| = \lambda||x - y||.$$

Do đó, sử dụng Bổ đề 1.1(2) ta được

$$|| z - Tz ||^2 = || (x - Tz) + (1-\lambda)(y - Tz) ||^2$$
$$= \lambda || x - Tz||^2 + (1-\lambda)||y - Tz ||^2$$
$$-\lambda(1-\lambda) || x - y||^2$$
$$\leq \lambda(1-\lambda)^2 || x - y ||^2 + (1-\lambda)\lambda^2 || x - y ||^2$$
$$- \lambda(1-\lambda) || x - y ||^2 = 0.$$

Điều này dẫn đến $z = Tz$ hay $z \in F(T)$. Vậy $F(T)$ cũng là tập lồi.

Mệnh đề 2.2. *Cho H là một không gian Hilbert thực, C là một tập con đóng trong H, $T : C \to C$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) và dãy $\{x_n\} \subset C$ sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim_{n\to\infty} ||x_n - Tx_n|| = 0$. Khi đó, $x \in F(T)$.*

Chứng minh. Do T thỏa mãn điều kiện (E_μ) trong C nên

$$|| x_n - Tx|| \leq \mu || x_n - Tx_n || + || x_n - x || .$$

Kết hợp với giả thiết $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim_{n\to\infty}||x_n - Tx_n|| = 0$, ta suy ra $\lim_{n\to\infty}||x_n - Tx|| = 0$ hay $\lim_{n\to\infty} x_n = Tx$. Kết hợp với $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ và tính duy nhất của giới hạn ta được $x = Tx$. Do đó, $x \in F(T)$.

Định lí sau là một mở rộng của Định lí 2.1 trong (Martinez-Yanes và Xu, 2006) từ ánh xạ không giãn sang họ các ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) trong không gian Hilbert thực.

Định lí 2.3. *Cho H là một không gian Hilbert thực, C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong H và $T_n : C \to C$ là các ánh xạ đóng đều thỏa mãn điều kiện (E_μ) sao cho $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \varnothing$. Với $x_0 \in H$, đặt $C_1 = C$ và $x_1 = P_{C_1}x_0$, xét dãy $\{x_n\}$ trong C xác định bởi*

$$\begin{cases} z_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)T_n x_n \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T_n z_n \\ C_{n+1} = \{v \in C_n : ||y_n - v||^2 \leq ||x_n - v||^2 \\ \qquad + (1-\alpha_n)(||z_n||^2 - ||x_n||^2 \\ \qquad + 2\langle x_n - z_n, v\rangle)\} \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

trong đó $\{\alpha_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là hai dãy trong $[0,1]$ sao cho $\alpha_n \leq 1 - \delta$ với $\delta \in (0,1]$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và $\{\beta_n\}$ hội tụ đến 1. Khi đó, $\{x_n\}$ hội tụ đến $z_0 = P_F x_0$.

Chứng minh. Ta chứng minh theo các bước sau.

Bước 1. Chứng minh C_n là tập lồi và đóng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Với $n = 1$, ta có $C_1 = C$ là tập lồi đóng trong H.

Giả sử C_n là tập lồi và đóng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh C_{n+1} cũng là tập lồi và đóng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy, theo Bổ đề 1.4, ta có C_{n+1} là tập lồi và đóng.

Bước 2. Chứng minh $F \subset C_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Với $n = 1$, ta có $F \subset F(T_1) \subset C = C_1$. Giả sử $F \subset C_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh $F \in C_{n+1}$. Thật vậy, với $u \in F$, ta có $u \in C_n$. Hơn nữa, sử dụng Bổ đề 1.1, ta có

$$||y_n - u||^2 = ||\alpha_n(x_n - u) + (1-\alpha_n)(T_n z_n - u)||^2$$
$$= \alpha_n||x_n - u||^2 + (1-\alpha_n)||T_n z_n - u||^2$$
$$-\alpha_n(1-\alpha_n)||x_n - T_n z_n||^2$$
$$\leq \alpha_n||x_n - u||^2 + (1-\alpha_n)||T_n z_n - u||^2$$

$$\le \alpha_n \|x_n - u\|^2 + (1-\alpha_n)(\mu\|u - T_n u\| + \|z_n - u\|)^2$$
$$= \|x_n - u\|^2 + (1-\alpha_n)(\|z_n - u\|^2 - \|x_n - u\|^2)$$
$$= \|x_n - u\|^2 + (1-\alpha_n)(\|z_n\|^2 - \|x_n\|^2 + 2\langle x_n - z_n, u\rangle).$$

Điều này có nghĩa là $u \in C_{n+1}$. Do đó, $F \subset C_{n+1}$.

Bước 3. Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ đến p và $p \in F$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, theo Mệnh đề 2.1, ta có $F(T_n)$ là tập con lồi đóng của C. Kết hợp với giả thiết $F \neq \varnothing$, ta cũng có $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ cũng là tập con lồi đóng khác rỗng của C. Khi đó, theo Bổ đề 1.2, tồn tại phần tử duy nhất $z_0 \in F$ sao cho $z_0 = P_F x_0$. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, vì $x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0$ nên $\|x_{n+1} - x_0\| \le \|z - x_0\|$ với mọi $z \in C_{n+1}$. (2.1)

Khi đó, do $z_0 \in F \subset C_{n+1}$ nên từ (2.1) ta có $\|x_{n+1} - x_0\| \le \|z_0 - x_0\|$. Điều này có nghĩa là $\{\|x_n - x_0\|\}$ bị chặn. Mặt khác, vì $x_n = P_{C_n} x_0$ nên $\|x_n - x_0\| \le \|z - x_0\|$ với mọi $z \in C_n$. (2.2)

Do $C_{n+1} \subset C_n$ nên $x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0 \in C_{n+1} \subset C_n$. Do đó, từ (2.2) ta được $\|x_n - x_0\| \le \|x_{n+1} - x_0\|$ hay $\{\|x_n - x_0\|\}$ là dãy đơn điệu tăng. Kết hợp với tính bị chặn của $\{\|x_n - x_0\|\}$, ta suy ra tồn tại giới hạn của $\{\|x_n - x_0\|\}$. Đặt

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = r. \tag{2.3}$$

Với mọi $m \ge n$, ta có $C_m \subset C_n$. Vì $x_n = P_{C_n} x_0$ nên theo Bổ đề 1.3, ta có $\langle z - x_n, x_n - x_0\rangle \ge 0$ với $z \in C_n$. Mà $x_m = P_{C_m} x_0 \in C_m \subset C_n$ nên ta có $\langle x_m - x_n, x_n - x_0\rangle \ge 0$. Khi đó, theo Bổ đề 1.1(1), ta có

$$\|x_m - x_n\|^2 = \|x_m - x_0 - (x_n - x_0)\|^2$$
$$= \|x_m - x_0\|^2 - \|x_n - x_0\|^2 - 2\langle x_m - x_n, x_n - x_0\rangle$$
$$\le \|x_m - x_0\|^2 - \|x_n - x_0\|^2. \tag{2.4}$$

Từ (2.3) và (2.4), ta suy ra $\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n\| = 0$. Do đó, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong C. Mặt khác, do C là tập đóng trong không gian Hilbert thực H nên C có tính đầy đủ. Khi đó, tồn tại $p \in C$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p. \tag{2.5}$$

Vì $x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0 \in C_{n+1}$ nên từ định nghĩa của C_{n+1} ta có

$$\|y_n - x_{n+1}\|^2 \le \|x_n - x_{n+1}\|^2 + (1-\alpha_n)(\|z_n\|^2 - \|x_n\|^2 + 2\langle x_n - z_n, x_{n+1}\rangle). \tag{2.6}$$

Mặt khác, theo Bổ đề 1.1(1) ta có

$$\|z_n\|^2 - \|x_n\|^2 + 2\langle x_n - z_n, x_{n+1}\rangle = \|z_n - x_n\|^2 + 2\langle x_n - z_n, x_{n+1} - x_n\rangle. \tag{2.7}$$

Từ $z_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n) T_n x_n$ và với $u \in F$, ta được

$$\|z_n - x_n\| = (1-\beta_n)\|x_n - T_n x_n\|$$
$$= (1-\beta_n)\|x_n - u + u - T_n x_n\|$$
$$\le (1-\beta_n)(\|x_n - u\| + \|u - T_n x_n\|)$$
$$\le (1-\beta_n)(2\|x_n - u\| + \mu\|u - T_n u\|)$$
$$= 2(1-\beta_n)\|x_n - u\|$$
$$\le 2(1-\beta_n)(\|x_n\| + \|u\|). \tag{2.8}$$

Kết hợp (2.8) với $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 1$ và (2.5), ta được $\lim_{n\to\infty} \|z_n - x_n\| = 0$. Kết hợp điều này với (2.5), (2.6) và (2.7), ta suy ra $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_{n+1}\| = 0$.

Ta lại có

$$||y_n - x_n|| \le ||y_n - x_{n+1}|| + ||x_{n+1} - x_n||.$$

Suy ra $\lim_{n\to\infty} ||y_n - x_n|| = 0.$ Mặt khác, từ $y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T_n x_n$ và $\alpha_n \le 1-\delta$ ta được

$$||x_n - T_n x_n|| = \frac{1}{1-\alpha_n}||y_n - x_n|| \le \frac{1}{\delta}||y_n - x_n||.$$

Suy ra $\lim_{n\to\infty} ||x_n - T_n x_n|| = 0.$ Kết hợp điều này với (2.5) và giả thiết $\{T_n\}$ là họ các ánh xạ đóng đều, ta suy ra $p \in F.$

Bước 4. Chứng minh $p = P_F x_0$.

Do $x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0$ nên theo Bổ đề 1.3, ta có $\langle y - x_{n+1}, x_{n+1} - x_0 \rangle \ge 0$ với mọi $y \in C_{n+1}$. Với mọi $q \in F \subset C_{n+1}$ ta có $\langle q - x_{n+1}, x_{n+1} - x_0 \rangle \ge 0.$ Cho $n \to \infty$ ta được $\langle q - p, p - x_0 \rangle \ge 0.$ Do đó, theo Bổ đề 1.3, ta có $p = P_F x_0.$

Tiếp theo, bằng cách sử dụng Định lí 2.3, ta nhận được một số kết quả cho sự hội tụ của dãy lặp dạng hỗn hợp kiểu Ishikawa cho ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) và ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert. Trong đó, Hệ quả 2.4 là một tổng quát của Định lí 2.1 trong (Martinez-Yanes và Xu, 2006) từ ánh xạ không giãn sang ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ).

Hệ quả 2.4. *Cho H là một không gian Hilbert thực, C là một tập con lồi đóng trong H và $T: C \to C$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) sao cho $F(T) \ne \varnothing$. Với $x_0 \in H$, đặt $C_1 = C$ và $x_1 = P_{C_1} x_0$, xét dãy $\{x_n\}$ trong C xác định bởi*

$$\begin{cases} z_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)Tx_n \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tz_n \\ C_{n+1} = \{v \in C_n : ||y_n - v||^2 \le ||x_n - v||^2 \\ \qquad + (1-\alpha_n)(||z_n||^2 - ||x_n||^2 \\ \qquad + 2\langle x_n - z_n, v\rangle)\} \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

trong đó $\{\alpha_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là hai dãy trong $[0,1]$ sao cho $\alpha_n \le 1-\delta$ với $\delta \in (0,1]$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và $\{\beta_n\}$ hội tụ đến 1. Khi đó, $\{x_n\}$ hội tụ đến $z_0 = P_{F(T)} x_0$.

Chứng minh. Bằng cách chọn $T_n = T$ với $n \in \mathbb{N}^*$, từ Định lí 2.3 và Mệnh đề 2.2, ta nhận được điều phải chứng minh.

Hệ quả 2.5. Cho H là một không gian Hilbert thực, C là một tập con lồi đóng trong H và $T: C \to C$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) sao cho $F(T) \ne \varnothing$. Với $x_0 \in H$, đặt $C_1 = C$ và $x_1 = P_{C_1} x_0$, xét dãy $\{x_n\}$ trong C xác định bởi

$$\begin{cases} z_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)((1-\lambda_n)x_n + \lambda_n Tx_n) \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)((1-\lambda_n)z_n + \lambda_n Tz_n) \\ C_{n+1} = \{v \in C_n : ||y_n - v||^2 \le ||x_n - v||^2 \\ \qquad + (1-\alpha_n)(||z_n||^2 - ||x_n||^2 \\ \qquad + 2\langle x_n - z_n, v\rangle)\} \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

trong đó $\{\alpha_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là hai dãy trong $[0,1]$ sao cho $\alpha_n \le 1-\delta$ với $\delta \in (0,1]$ và $0 < a \le \lambda_n \le 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và $\{\beta_n\}$ hội tụ đến 1. Khi đó, $\{x_n\}$ hội tụ đến $z_0 = P_{F(T)} x_0$.

Chứng minh. Đặt $T_n x = (1-\lambda_n)x + \lambda_n Tx$ với $x \in C$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh $\{T_n\}$ là họ ánh xạ thỏa mãn các giả thiết của Định lí 2.3. Thật vậy,

(1) Với $\{x_n\}$ là một dãy trong C sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim_{n\to\infty} ||x_n - T_n x_n|| = 0.$ Vì

$$\begin{aligned} ||x_n - T_n x_n|| &= ||x_n - (1-\lambda_n)x_n - \lambda_n Tx_n|| \\ &= ||\lambda_n x_n - \lambda_n Tx_n|| = \lambda_n ||x_n - Tx_n|| \end{aligned}$$

nên kết hợp với $0 < a \le \lambda_n \le 1$ ta có $\lim_{n\to\infty} ||x_n - Tx_n|| = 0.$ Từ Mệnh đề 2.2, ta suy ra $x \in F(T)$. Do đó, $\{T_n\}$ là họ ánh xạ đóng đều.

(2) Với $x, y \in C,$ ta có

$$||x - T_n y|| = ||x - (1-\lambda_n)y - \lambda_n Ty||$$
$$= ||x + (1-\lambda_n)x - (1-\lambda_n)x - (1-\lambda_n)y - \lambda_n Ty)||$$
$$= ||(1-\lambda_n)(x-y) + \lambda_n(x - Ty)||$$
$$\le (1-\lambda_n)||x-y|| + \lambda_n||x - Ty||$$
$$\le (1-\lambda_n)||x-y|| + \lambda_n(\mu||x-Tx|| + ||x-y||)$$
$$\le ||x-y|| + \mu\lambda_n||x-Tx||$$
$$\le ||x-y|| + \mu||x - T_n x||.$$

Do đó, $\{T_n\}$ là họ ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ).

(3) Do $F(T) \neq \varnothing$ nên tồn tại $u \in C$ sao cho $Tu = u$. Mặt khác, với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $||u - T_n u|| = \alpha_n ||u - Tu|| = 0.$ Do đó, $u \in F(T_n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ hay $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \varnothing.$ Hơn nữa, ta cũng có $F(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n).$ Như vậy $\{T_n\}$ là họ ánh xạ thỏa mãn các giả thiết của Định lí 2.3. Do đó, $\{x_n\}$ hội tụ đến $z_0 = P_{F(T)}x_0$.

Vì mỗi ánh xạ không giãn là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) nên từ Định lí 2.3, Hệ quả 2.4 và Hệ quả 2.5, ta nhận được kết quả sau.

Hệ quả 2.6. Cho H là một không gian Hilbert thực, C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong H và $T_n : C \to C$ là các ánh xạ không giãn, đóng đều sao cho $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \varnothing.$ Với $x_0 \in H,$ đặt $C_1 = C$ và $x_1 = P_{C_1}x_0,$ xét dãy $\{x_n\}$ trong C xác định bởi

$$\begin{cases} z_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)T_n x_n \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)T_n z_n \\ C_{n+1} = \{v \in C_n : ||y_n - v||^2 \le ||x_n - v||^2 \\ \qquad + (1-\alpha_n)(||z_n||^2 - ||x_n||^2 \\ \qquad + 2\langle x_n - z_n, v\rangle)\} \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

trong đó $\{\alpha_n\}$ *và* $\{\beta_n\}$ *là hai dãy trong* $[0,1]$ *sao cho* $\alpha_n \le 1-\delta$ *với* $\delta \in (0,1],$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$ *và* $\{\beta_n\}$ *hội tụ đến 1. Khi đó,* $\{x_n\}$ *hội tụ đến* $z_0 = P_F x_0$.

Hệ quả 2.7. Cho H là một không gian Hilbert thực, C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong H và $T : C \to C$ là ánh xạ không giãn sao cho $F(T) \neq \varnothing.$ Với $x_0 \in H,$ đặt $C_1 = C$ và $x_1 = P_{C_1}x_0,$ xét dãy $\{x_n\}$ trong C xác định bởi

$$\begin{cases} z_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)Tx_n \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tz_n \\ C_{n+1} = \{v \in C_n : ||y_n - v||^2 \le ||x_n - v||^2 \\ \qquad + (1-\alpha_n)(||z_n||^2 - ||x_n||^2 \\ \qquad + 2\langle x_n - z_n, v\rangle)\} \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

trong đó $\{\alpha_n\}$ *và* $\{\beta_n\}$ *là hai dãy trong* $[0,1]$ *sao cho* $\alpha_n \le 1-\delta$ *với* $\delta \in (0,1],$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$ *và* β_n *hội tụ đến 1. Khi đó,* $\{x_n\}$ *hội tụ đến* $z_0 = P_{F(T)}x_0$.

Hệ quả 2.8. Cho H là một không gian Hilbert thực, C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong H và $T : C \to C$ là ánh xạ không giãn sao cho $F(T) \neq \varnothing.$ Với $x_0 \in H,$ đặt $C_1 = C$ và $x_1 = P_{C_1}x_0,$ xét dãy $\{x_n\}$ trong C xác định bởi

$$\begin{cases} z_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)((1-\lambda_n)x_n + \lambda_n T x_n) \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)((1-\lambda_n)x_n + \lambda_n T z_n) \\ C_{n+1} = \{v \in C_n : ||y_n - v||^2 \le ||x_n - v||^2 \\ \qquad + (1-\alpha_n)(||z_n||^2 - ||x_n||^2 \\ \qquad + 2\langle x_n - z_n, v\rangle)\} \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

trong đó $\{\alpha_n\}$ *và* $\{\beta_n\}$ *là hai dãy trong* $[0,1]$ *sao cho* $\alpha_n \le 1-\delta$ *với* $\delta \in (0,1]$, $0 < a \le \lambda_n \le 1$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$ *và* $\{\beta_n\}$ *hội tụ đến 1. Khi đó,* $\{x_n\}$ *hội tụ đến* $z_0 = P_{F(T)} x_0$.

Cuối cùng, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho sự hội tụ của dãy lặp trong Hệ quả 2.4.

Ví dụ 2.9. Xét $C = [-5,-2]$ và ánh xạ $T : C \to C$ xác định bởi $Tx = \dfrac{3}{x+1} - 2$ với $x \in C$. Cho dãy $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 \in C, C_1 = C$ và $x_{n+1} \in \{u_{n+1} \in C_{n+1} : | u_{n+1} - x_0 |$ nhỏ nhất$\}$

với $z_n = e^{-\frac{1}{n}} x_n + (1 - e^{-\frac{1}{n}})(\dfrac{1-2x_n}{x_n+1})$,

$y_n = \dfrac{n}{2n+1} x_n + \dfrac{n+1}{2n+1}(\dfrac{1-2z_n}{z_n+1})$ và

$$C_{n+1} = \{v \in C_n : |y_n - v|^2 \le |x_n - v|^2 + \frac{n+1}{2n+1}(|z_n|^2 - |x_n|^2 + 2v(x_n - z_n))\},$$

Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$. Trước hết, ta sẽ chứng tỏ T là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ). Thật vậy, với $x, y \in C$, ta có $||x - Ty|| = ||x - y + y - Tx|| \le ||y - Ty|| + ||x - y||$. Ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại $\mu \ge 1$ sao cho $||y - Ty|| \le \mu||x - Tx||$, với mọi $x, y \in [-5,-2]$. Đặt

$$f(y) = y - Ty = y - \frac{3}{y+1} + 2 \text{ với } y \in C.$$

Khi đó, f đơn điệu tăng trên C. Do đó, tồn tại $\mu \ge 1$ sao cho

$$||y - Ty|| \le |f(-2)| = 3 \le \mu\, |f(-5)| \le \mu||x - Tx||.$$

Suy ra $||x - Ty|| \le \mu\, ||x - Tx|| + ||x - y||$ hay ánh xạ T là ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ).

Chọn $\alpha_n = \dfrac{n}{2n+1}$ và $\beta_n = e^{-\frac{1}{n}}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ thỏa mãn các giả thiết trong Hệ quả 2.4. Vì vậy, theo Hệ quả 2.4, dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến $z_0 = P_{F(T)} x_0 = \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$.

Mặt khác, T không là ánh xạ không giãn. Thật vậy, chọn $x = -2, y = -2.5$, ta có $||Tx - Ty|| = 1 > 0.5 = ||x - y||$. Vì vậy, Hệ quả 2.7 không áp dụng được cho dãy $\{x_n\}$.

3 KẾT LUẬN

Việc nghiên cứu mở rộng những kết quả chính của (Martinez-Yanes và Xu, 2006) được một số tác giả quan tâm. Trong các công trình (Kim, 2008; Qin *et al.*, 2008), các tác giả đã thiết lập được một số mở rộng của dãy lặp hỗn hợp kiểu Halpern và dãy lặp hỗn hợp kiểu Ishikawa cho ánh xạ không giãn có mối liên hệ tiệm cận trong không gian Banach. Bằng cách bớt đi tập Q_n trong dãy lặp hỗn hợp kiểu Ishikawa, nghiên cứu đã xây dựng một số dãy lặp hỗn hợp kiểu Ishikawa. Những dãy lặp được đề xuất trong bài báo là không phức tạp và tính toán đơn giản hơn so với những dãy lặp trong (Martinez-Yanes và Xu, 2006; Kim, 2008; Qin *et al.*, 2008). Đồng thời, nghiên cứu cũng thiết lập và chứng minh một định lí về sự hội tụ của dãy lặp hỗn hợp kiểu Ishikawa cho họ ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) trong không gian Hilbert. Một số kết quả về sự hội tụ của dãy lặp hỗn hợp kiểu Ishikawa cho ánh xạ không giãn và ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E_μ) trong không gian Hilbert có được từ định lí.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bagherboum, M., 2016. Approximating fixed points of mappings satisfying condition (*E*) in Busemann space. Numerical Algorithms. 71(1): 25-39.

Garcia-Falset, J., Llorens-Fuster, E., Suzuki, T., 2011. Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 375(1): 185-195.

Kim, T. H., 2008. Strong convergence of approximating fixed point sequences for relatively nonlinear mappings. Thai Journal of Mathematics. 6(1): 17-35.

Marino, G., Xu, H., 2007. Weak and strong convergence theorems for strict pseudo-contractions in Hilbert spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 329: 43-52.

Martinez-Yanes, C., Xu, X., 2006. Strong convergence of the CQ method for fixed point iteration processes. Nonlinear Analysis. 64: 2400-2411.

Nakajo, K., Takahashi, W., 2003. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 279(2): 372-379.

Qin, X., Kang, S. M., Sun, Y. C., 2008. Strong convergence theorem of fixed point for relatively asymptotically nonexpansive mappings. Journal of Chungcheong Mathematical Society. 21 (3): 327-337.

Suzuki, T., 2008. Fixed point theorems and convergence for some generalized nonexpansive mappings. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 340(2): 1088-1095.

Takahashi, W., Takeuchi, Y., Kubota, R., 2008. Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 341(1): 276-286.

Zhang, J., Su, Y., Cheng, Q., 2014. Uniformly closed replaced AKTT or *AKTT condition to get strong convergence theorems for a countable family of relatively quasi-nonexpansive mappings and systems of equilibrium problems. Fixed Point Theory and Applications. 2014(103): 1-17.