Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2019.005

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU TẬP CHẤP NHẬN ĐƯỢC LỒI XÁC ĐỊNH BỞI VÔ HẠN RÀNG BUỘC BẤT ĐẲNG THỨC

Lê Thanh Tùng[1*], Trần Thiện Khải[2], Phạm Thanh Hùng[3] và Phạm Lê Bạch Ngọc[3]

[1]*Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*

[2]*Trung tâm Đào tạo và Hợp tác Doanh nghiệp, Trường Đại học Trà Vinh*

[3]*Khoa Sư phạm và Xã hội Nhân văn, Trường Đại học Kiên Giang*

**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Lê Thanh Tùng (email: lttung@ctu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 22/05/2018
Ngày nhận bài sửa: 03/08/2018
Ngày duyệt đăng: 27/02/2019

Title:
Optimality conditions in convex optimization with the convex feasible set defined by infinite inequality constraints

Từ khóa:
Bài toán tối ưu nửa vô hạn, dưới vi phân Michel-Penot, điều kiện tối ưu, tối ưu lồi, tối ưu trơn và không trơn

Keywords:
Semi-infinite programming, Michel-Penot subdifferential, optimality conditions, convex optimization, smooth and nonsmooth optimization

ABSTRACT

The paper deals with the necessary and sufficient optimality conditions for the convex optimization problem with convex feasible set defined by infinite inequality constraints in the both cases, smooth and nonsmooth data. The results enhance some recent KKT type theorems by Lasserre for differentiable functions and by Dutta and Lalitha for Lipschitz functions.

TÓM TẮT

Bài báo này khảo sát điều kiện tối ưu cần và đủ cho bài toán tối ưu lồi có tập chấp nhận được lồi được định nghĩa bởi vô hạn ràng buộc bất đẳng thức cả trong trường hợp trơn và không trơn. Kết quả đã phát triển một số định lý điều kiện tối ưu dạng KKT gần đây bởi Lasserre đối với lớp hàm khả vi và bởi Dutta và Lalitha đối với lớp hàm Lipschitz.

Trích dẫn: Lê Thanh Tùng, Trần Thiện Khải, Phạm Thanh Hùng và Phạm Lê Bạch Ngọc, 2019. Điều kiện tối ưu tập chấp nhận được lồi xác định bởi vô hạn ràng buộc bất đẳng thức. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 55(1A): 39-46.

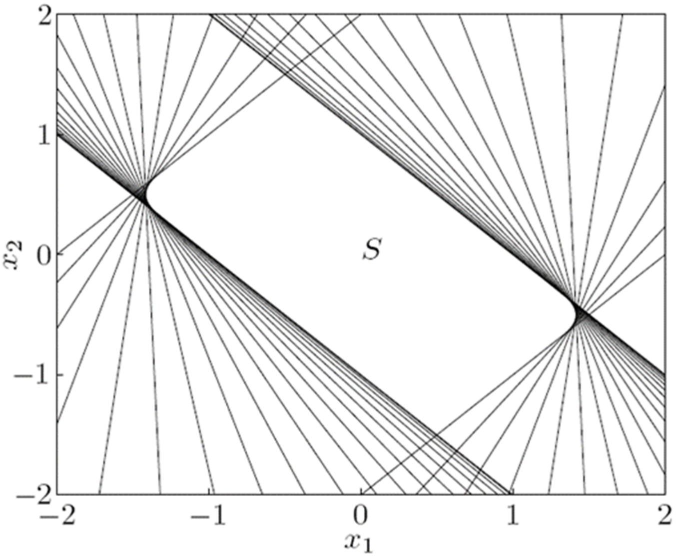
1 MỞ ĐẦU

Tối ưu lồi là một chủ đề quan trọng trong lý thuyết tối ưu và ứng dụng (Rockafellar, 1970; Hiriart-Urruty và Lemarechal, 1993). Trong bài báo gần đây, Lasserre (2011) thu được định lý dạng KKT bằng cách ràng buộc tập chấp nhận được là lồi thay vì hàm ràng buộc là lồi. Kết quả này mở rộng đối với trường hợp hàm không trơn trong bài của Dutta và Lalitha (2013) theo hướng sử dụng dưới vi phân Clarke. Matinez-Legaz (2015) đã thống nhất lại các kết quả trên bằng cách sử dụng dưới vi phân tiếp tuyến, được đề xuất trong nghiên cứu của Pshenichnyi (1971). Một vài phát triển đối với hàm lồi suy rộng được trong nghiên cứu của Giorgi (2013) và Quyen (2017). Kết quả nghiên cứu của Dutta và Lalitha (2013) được mở rộng sang cho bài toán tối ưu đa mục tiêu có tập ràng buộc lồi trong Kuroiwa và Yamamoto (2016). Một số định tính ràng buộc cho bài toán tối ưu với tập ràng buộc lồi được khảo sát trong Chieu *et. al.* (2018).

Tuy nhiên, các kết quả nêu trên chỉ mới xét tập chấp nhận được là lồi được xác định bởi hữu hạn các ràng buộc bất đẳng thức. Trong trường hợp tổng quát, một tập lồi có thể được xác định bởi hữu hạn các ràng buộc bất đẳng thức lẫn vô hạn các ràng buộc bất đẳng thức. Chẳng hạn, Boyd và Vandenberghe (2004) với tập lồi S được xác định bởi giao vô hạn các ràng buộc bất đẳng thức

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \le x_1 \cos t + x_2 \cos 2t \le 1, -\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{3}\right\}$$

biểu diễn như sau.



Từ những quan sát nêu trên, trong bài báo này, nghiên cứu điều kiện cần và đủ tối ưu cho bài toán tối ưu lồi đối với tập chấp nhận được lồi được định nghĩa bởi vô hạn ràng buộc bất đẳng thức được thực hiện. Bài báo được sắp xếp như sau: Phần 2 sẽ nhắc lại những khái niệm cơ bản và kiến thức chuẩn bị; trong Phần 3, điều kiện tối ưu KKT được xây dựng cho trường hợp hàm trơn; trong Phần 4, điều kiện tối ưu KKT được nghiên cứu trong trường hợp hàm Lipschitz theo hướng sử dụng dưới vi phân Michel-Penot; một số ví dụ được đưa ra minh họa cho kết quả.

2 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Các ký hiệu và định nghĩa sau đây sẽ được sử dụng trong suốt bài báo. Ký hiệu $\mathbb{R}^n$ cho một không gian định chuẩn hữu hạn chiều. Ký hiệu $\mathbb{R}^n$ là không gian đối ngẫu $\left(\mathbb{R}^n\right)^*$ và $\left\langle x^*, x\right\rangle$ là giá trị của ánh xạ tuyến tính liên tục $x^* \in \left(\mathbb{R}^n\right)^*$ tại $x \in \mathbb{R}^n$. Với $S \subseteq \mathbb{R}^n$, ta lần lượt gọi int$S$, cl$S$, bd$S$ và co$S$ là phần trong, bao đóng, biên và bao lồi của **S**. Kí hiệu $|S|$ là lực lượng của **S**, tức là số phần tử của **S**. Nón lồi chứa gốc sinh bởi **S** được kí hiệu pos$S$, được định nghĩa như sau:

$$\text{pos } S := \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i,\ x_i \in S, \lambda_i \ge 0,\ i = 1, \dots, k\right\}.$$

Với $\bar{x}$ cho trước, $U(\bar{x})$ là một họ các lân cận của $\bar{x}$. Với $\rho > 0$, kí hiệu $B(\bar{x}, \rho) := \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|x - \bar{x}\| \le \rho\right\}$ là hình cầu đóng tâm $\bar{x}$, bán kính ρ. Nón cực âm và nón cực âm chặt của **S** lần lượt được định nghĩa

$$S^- := \left\{x^* \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \left\langle x^*, x\right\rangle \le 0,\ \forall x \in S\right\},$$

$$S^s := \left\{x^* \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \left\langle x^*, x\right\rangle < 0, \forall x \in S \setminus \{0\}\right\}.$$

Đạo hàm theo hướng bên phải của hàm $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tại $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ theo hướng $d \in \mathbb{R}^n$ được kí hiệu $\phi'(\bar{x}, d)$ và được xác định bởi

$$\phi'(\bar{x}, d) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{\phi(\bar{x} + hd) - \phi(\bar{x})}{h}.$$

Định nghĩa 2.1. (Clarke, 1983) Giả sử $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ và $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm Lipschitz địa phương. Đạo hàm theo hướng Clarke của $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tại $\bar{x}$ theo hướng u được xác định bởi

$$\phi^{o}\left(\bar{x},u\right) := \limsup_{h\downarrow 0, x\to \bar{x}} \frac{\phi(x+hu)-\phi(x)}{h}.$$

Dưới vi phân Clarke của ϕ tại $\bar{x}$ là

$$\partial^{C}\phi\left(\bar{x}\right) := \left\{x^{*}\in \mathbb{R}^{n} \middle| \left\langle x^{*},d\right\rangle \le \phi^{o}\left(\bar{x},d\right),\ \forall d\in \mathbb{R}^{n}\right\}.$$

Hàm ϕ được gọi là chính quy Clarke tại $\bar{x}$ nếu tồn tại $\phi'\left(\bar{x},d\right)$ và $\phi^{o}\left(\bar{x},d\right)=\phi'\left(\bar{x},d\right)$ với mọi $d\in \mathbb{R}^{n}$.

Định nghĩa 2.2. (Michel và Penot, 1984; Michel và Penot, 1992) Giả sử $\bar{x}\in\mathbb{R}^{n}$ và $\phi:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ là hàm Lipschitz địa phương. Đạo hàm theo hướng Michel-Penot (MP) của $\phi:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ tại $\bar{x}$ theo hướng u được xác định bởi

$$\phi^{\Diamond}\left(\bar{x},u\right) := \sup_{v\in\mathbb{R}^{n}} \limsup_{h\downarrow 0} \frac{\phi\left(\bar{x}+h\left(u+v\right)\right)-\phi\left(\bar{x}+hv\right)}{h}.$$

Dưới vi phân MP của ϕ tại $\bar{x}$ là

$$\partial^{MP}\phi\left(\bar{x}\right) := \left\{x^{*}\in\mathbb{R}^{n} \middle| \left\langle x^{*},d\right\rangle \le \phi^{\Diamond}\left(\bar{x},u\right),\ \forall d\in\mathbb{R}^{n}\right\}.$$

Hàm ϕ được gọi là chính quy MP tại $\bar{x}$ nếu $\phi'\left(\bar{x},d\right)$ tồn tại và $\phi^{\Diamond}\left(\bar{x},d\right)=\phi'\left(\bar{x},d\right)$ với mọi $d\in\mathbb{R}^{n}$.

Các tính chất sau của đạo hàm theo hướng MP và dưới vi phân MP được sử dụng trong phần tiếp theo (Michel và Penot, 1984; Michel và Penot, 1992).

Bổ đề 2.1. Giả sử hàm $\phi:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ là Lipschitz trong lân cận của điểm $\bar{x}$. Khi đó, ta có các khẳng định sau đây:

(i) Hàm $v=\phi^{\Diamond}\left(\bar{x},v\right)$ hữu hạn, thuần nhất dương, dưới cộng tính trên $\mathbb{R}^{n}$, $\phi^{\Diamond}\left(\bar{x},0\right)=0$ và

$$\partial\left(\phi^{\Diamond}\left(\bar{x},.\right)\right)(0)=\partial^{MP}\phi\left(\bar{x}\right),$$

trong đó ∂ là dưới vi phân theo nghĩa giải tích lồi.

(ii) $\partial^{MP}\phi\left(\bar{x}\right)$ *là tập con khác rỗng, lồi và compact của* $\mathbb{R}^{n}$.

(iii) $\phi^{\Diamond}\left(\bar{x},v\right)=\max_{\xi\in\partial^{MP}\phi\left(\bar{x}\right)}\left\langle \xi,v\right\rangle.$

(iv) Nếu ϕ khả vi Gateaux tại $\bar{x}$ thì $\partial^{MP}\phi\left(\bar{x}\right)=\left\{\nabla\phi\left(\bar{x}\right)\right\}$. Nếu ϕ lồi thì $\partial^{MP}\phi\left(\bar{x}\right)=\partial\phi\left(\bar{x}\right)$.

(v) Nếu ϕ là chính quy Clarke tại $\bar{x}$ thì ϕ là chính quy MP tại $\bar{x}$.

(vi) $\partial^{MP}\phi\left(\bar{x}\right)\subseteq\partial^{C}\phi\left(\bar{x}\right)$.

Bổ đề 2.1 (vi) cho thấy rằng các điều kiện cần tối ưu khi sử dụng dưới vi phân MP rõ ràng hơn so với điều kiện tối ưu thông qua sử dụng dưới vi phân Clarke (Ye, 2004; Kanzi, 2014; Carsiti và Ferrara 2017; Tung 2017). Ví dụ sau đây cho thấy rằng quan hệ bao hàm trong Bổ đề 2.1 (vi) có thể chặt.

Ví dụ 2.1. Giả sử $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ được xác định như sau

$$\phi(x)=\begin{cases} x^{2}\sin\dfrac{2}{x}+x, & khi\ x\neq 0\\ 0, & khi\ x=0.\end{cases}$$

Khi đó, với $\bar{x}=0$, ta có

$$\partial^{MP}\phi\left(\bar{x}\right)=\{1\},$$

$$\partial^{C}\phi\left(\bar{x}\right)=[-1,3],$$

và do đó, $\partial^{MP}\phi\left(\bar{x}\right)\underset{\neq}{\subset}\partial^{C}\phi\left(\bar{x}\right).$

Bổ đề 2.2. (Rockafellar, 1970) Cho $\left\{C_{t}\middle| t\in\Gamma\right\}$ là một họ tùy ý các tập lồi khác rỗng trong $\mathbb{R}^{n}$ và $K=\mathrm{pos}\left(\bigcup_{t\in\Gamma} C_{t}\right)$. Khi đó, mọi vectơ khác không của **K** có thể được biểu diễn dưới dạng một tổ hợp tuyến tính không âm của n hoặc ít hơn các vectơ độc lập tuyến tính, mỗi vectơ thuộc một C_{t} khác nhau.

Trong bài báo này, bài toán tối ưu lồi được xét có dạng như sau

(P) $\quad \min\left\{f(x),\ g_{t}(x)\le 0,\ t\in T\right\},$

trong đó f, g_{t}, $t\in T$ là các hàm từ $\mathbb{R}^{n}$ vào $\mathbb{R}$ và T là tập khác rỗng bất kỳ, không cần thiết hữu hạn. Kí hiệu tập chấp nhận được của (P) là

$$\Omega := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \, g_t(x) \le 0, t \in T \right\}.$$

Trong bài báo này, luôn giả sử rằng Ω là tập lồi, T là tập compact và ánh xạ đa trị $(x,t) \to g_t(x)$ nửa liên tục trên $\mathbb{R}^n \times T$.

Điểm $\bar{x}$ được gọi là nghiệm địa phương của (P) nếu tồn tại $U \in U(\bar{x})$ sao cho

$$f(x) \ge f(\bar{x}), \forall x \in \Omega \cap U.$$

Nếu $U = \mathbb{R}^n$, cụm từ "địa phương" được bỏ đi, tức là có khái niệm toàn cục. Bài toán (P) thỏa mãn điều kiện Slater (SC) nếu

tồn tại $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ sao cho $g_t(\tilde{x}) < 0, \forall t \in T$.

Kí hiệu $\mathbb{R}_+^{|T|}$ là tập hợp tất cả các hàm $\lambda : T \to \mathbb{R}_+$ chỉ lấy các giá trị dương của λ_t tại một số hữu hạn điểm của T và bằng không tại các điểm còn lại, tức là tồn tại một tập chỉ số hữu hạn khác rỗng $J := \{1, 2, ..., k\} \subset T$ sao cho $\lambda_t > 0$ với mọi $t \in J$ và $\lambda_t = 0$ với mọi $t \in T \setminus J$. Với $\bar{x} \in \Omega$ cho trước, kí hiệu $T(\bar{x}) = \{t \in T \,|\, g_t(\bar{x}) = 0\}$ là tập chỉ số tất cả các ràng buộc theo chỉ số hoạt tại $\bar{x}$. Tập các nhân tử ràng buộc theo chỉ số hoạt tại $\bar{x} \in \Omega$ là

$$\Lambda(\bar{x}) := \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^{|T|} \middle| \lambda_t g_t(\bar{x}) = 0, \forall t \in T \right\}.$$

Lưu ý rằng $\lambda \in \Lambda(\bar{x})$ nếu tồn tại tập chỉ số hữu hạn $I := \{1, 2, ..., m\} \subset T(\bar{x})$ sao cho $\lambda_t > 0$ với mọi $t \in I$ và $\lambda_t = 0$ với mọi $t \in T \setminus I$.

Nhận xét 2.1. Khi f và g_t, $t \in T$ là các hàm lồi, (P) được gọi là bài toán tối ưu nửa vô hạn lồi (Goberna và Lopez, 1998; Goberna *et. al.,* 2016; Goberna và Kanzi, 2017). Trong trường hợp này, có thể thấy rằng tập chấp nhận được Ω hiển nhiên là tập lồi.

3 TRƯỜNG HỢP HÀM TRƠN

Trong phần này, ta giả sử rằng f, g_t, $t \in T$ là khả vi liên tục trên $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 3.1. Ta nói rằng giả thiết (A) thỏa tại $x \in \Omega$ nếu với mọi $t \in T$,

$\nabla g_t(x) \ne 0$, khi $g_t(x) = 0$.

Chú ý rằng dưới điều kiện Slater, (A) tự động thỏa nếu g_t là lồi.

Bổ đề 3.1. Giả sử (SC) thỏa và (A) thỏa với mọi $x \in \Omega$. Khi đó, Ω là tập lồi nếu và chỉ nếu với mọi $t \in T$:

$$\langle \nabla g_t(x), y - x \rangle \le 0, \forall x, y \in \Omega \text{ với } g_t(x) = 0.$$

Chứng minh: *Khi* $g_t, t \in T$ liên tục, Ω là đóng với phần trong khác rỗng. Việc chứng minh tương tự với chứng minh Bổ đề 2.2 (Lasserre, 2011). □

Định nghĩa 3.2. Một điểm $\bar{x} \in \Omega$ được gọi là một điểm KKT của (P) nếu tồn tại $\lambda \in \Lambda(\bar{x})$ sao cho

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{t \in T} \lambda_t \nabla g_t(\bar{x}) = 0.$$

Mệnh đề 3.1. Giả sử (SC) thỏa và (A) thỏa với mọi $\bar{x} \in \Omega$. Nếu $\bar{x}$ là một nghiệm địa phương của (P) thì $\bar{x}$ là một diểm KKT của (P).

Chứng minh: Giả sử $\bar{x} \in \Omega$ là một nghiệm địa phương của (P). Điều kiện tối ưu Fritz-John phát biểu rằng (Lopez và Still, 2007) tồn tại $\alpha \ge 0$ và $\lambda \in \Lambda(\bar{x})$ với $\alpha + \sum_{t \in T} \lambda_t = 1$ sao cho

$$\alpha \nabla f(\bar{x}) + \sum_{t \in T} \lambda_t \nabla g_t(\bar{x}) = 0. \quad (1)$$

Ta chứng minh rằng $\alpha \ne 0$. Giả sử ngược lại $\alpha = 0$. Khi đó, tập $J := \{t \in T \,|\, \lambda_t > 0, \lambda \in \Lambda(\bar{x})\}$ khác rỗng và $g_t(\bar{x}) = 0$ với mọi $t \in J$. Khi (SC) thỏa, tồn tại $\rho > 0$ sao cho $B(\tilde{x}, \rho) \subset \Omega, g_t(\tilde{x}) < 0$ với mọi $t \in T$, và $g_t(x) < 0$ với mọi $x \in B(\tilde{x}, \rho)$. Từ (1) suy ra

$$\sum_{t \in T} \lambda_t \langle \nabla g_t(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle = 0, \forall x \in B(\tilde{x}, \rho).$$

Do đó, theo Bổ đề 3.1, suy ra rằng $\langle \nabla g_t(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle = 0$ với mọi $t \in J$ và $x \in B(\tilde{x}, \rho)$. Điều này dẫn đến $\nabla g_t(\bar{x}) = 0$ với mọi $t \in J$, mâu thuẫn với (A). Vì vậy $\alpha > 0$, và không mất tính tổng quát chúng ta lấy $\alpha = 1$. □

Định nghĩa 3.3. f được gọi là giả lồi tại $\bar{x}$ nếu với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho $\langle \nabla f(\bar{x}), x-\bar{x} \rangle \geq 0$, ta có $f(x) \geq f(\bar{x})$.

Mệnh đề 3.2. Giả sử $\bar{x}$ là một điểm KKT của (P). Khi đó, $\bar{x}$ là một nghiệm của (P) nếu một trong các điều kiện sau thỏa:

(i) f là giả lồi tại $\bar{x}$.

(ii) $L_f^{<}(\bar{x}) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, f(x) < f(\bar{x}) \right\}$ là lồi.

Chứng minh : (i) Chứng minh tương tự như chứng minh của Định lý 2.3 (Giorgi, 2013).

(ii) Chứng minh tương tự như chứng minh của Định lý 1 (ii) (Quyen, 2017). □

Ví dụ 3.1. Giả sử $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được định nghĩa

$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$

Và tập chấp nhận được Ω được cho như sau

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g_t(x) \leq 0, t \in T = [0,1] \right\},$$

trong đó $g_0(x) = -x_1$ và $g_t(x) = t - x_1^2 x_2$, $t \in (0,1]$. Dễ thấy Ω là tập lồi và g_t, $t \in (0,1]$ không là hàm lồi. Với $\bar{x} = (1,1)$, ta có $\bar{x} \in \Omega$ và $T(\bar{x}) = \{1\}$. Ta kiểm tra các giả thiết trong Mệnh đề 3.1 đều thỏa. Giả sử $\lambda : T \to \mathbb{R}_+$ được định nghĩa

$$\lambda(t) = \begin{cases} 1, & khi\ t = 1, \\ 0, & khi\ t \in [0,1). \end{cases}$$

Khi đó. $\lambda \in \Lambda(\bar{x})$ và

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{t \in T} \lambda_t \nabla g_t(\bar{x}) = (2,1) + 1(-2,-1) = 0.$$

Ngược lại, khi hàm f lồi, thì giả sử trong Mệnh đề 3.2 thỏa. Do đó, điểm KKT $\bar{x}$ là nghiệm của (P). Kết luận này có thể kiểm tra trực tiếp sau đây. Với mọi $x \in \Omega$, ta có

$$f(x) = 2x_1 + x_2 \geq 2x_1 + \frac{1}{x_1^2}$$
$$= x_1 + x_1 + \frac{1}{x_1^2} \geq 3\sqrt[3]{x_1 . x_1 . \frac{1}{x_1^2}}$$
$$= 3 = f(\bar{x})$$

4 TRƯỜNG HỢP HÀM LIPSCHITZ

Trong phần này, ta giả sử f, g_t, $t \in T$ là những hàm Lipschitz địa phương nhưng không cần nhất thiết phải lồi. Giả sử $\bar{x} \in \Omega$, ta đặt

$$G(\bar{x}) := \bigcup_{t \in T(\bar{x})} \partial^{MP} g_t(\bar{x}).$$

Bổ đề 4.1. (Caristi và Ferrara, 2017) Giả sử rằng $\partial^{MP} g_t(\bar{x})$ là một ánh xạ đa trị nửa liên tục trên theo t tại $\bar{x} \in \Omega$. Ta kí hiệu $\mathcal{G}(\bar{x}) := \max_{t \in T} g_t(x), \forall x \in \Omega$ thì

(i) $\operatorname{co} G(\bar{x})$ là tập compact,

(ii) $\partial^{MP} \mathcal{G}(\bar{x}) \subseteq \operatorname{co} G(\bar{x})$.

Bây giờ, ta thiết lập điều kiện cần tối ưu ở dạng Fritz-John cho nghiệm địa phương của bài toán (P) sau đây.

Mệnh đề 4.1. Giả sử rằng $\partial^{MP} g_t(\bar{x})$ là một ánh xạ đa trị nửa liên tục trên theo t tại $\bar{x} \in \Omega$. Nếu $\bar{x}$ là nghiệm địa phương của bài toán (P), thì tồn tại $\alpha \geq 0$ và $\lambda \in \Lambda(\bar{x})$ sao cho $\alpha + \sum_{t \in T} \lambda_t = 1$ thỏa mãn

$$0 \in \alpha \partial^{MP} f(\bar{x}) + \sum_{t \in T} \lambda_t \partial^{MP} g_t(\bar{x}).$$

Chứng minh. Từ Bổ đề 4.1 (i), suy ra $G(\bar{x})$ là tập compact. Điều này dẫn đến $\partial^{MP} f(\bar{x}) \cup G(\bar{x})$ cũng là tập compact, và do đó $\operatorname{co}\left(\partial^{MP} f(\bar{x}) \cup G(\bar{x})\right)$ là tập đóng. Tiếp theo ta chứng minh

$$0 \in \operatorname{co}\left(\partial^{MP} f(\bar{x}) \cup G(\bar{x})\right). \quad (2)$$

Giả sử ngược lại $0 \notin \operatorname{co}\left(\partial^{MP} f(\bar{x}) \cup G(\bar{x})\right)$. Áp dụng Định lý tách chặt tồn tại $u \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn

$$\langle x^*, u \rangle < 0, \forall x^* \in \operatorname{co}\left(\partial^{MP} f(\bar{x}) \cup G(\bar{x})\right).$$

Suy ra,

$$u \in \left(\operatorname{co}\left(\partial^{MP} f\left(\bar{x}\right) \cup G\left(\bar{x}\right)\right)\right)^{S}$$

$$= \left(\partial^{MP} f\left(\bar{x}\right) \cup G\left(\bar{x}\right)\right)^{S}$$

$$= \left(\partial^{MP} f\left(\bar{x}\right)\right)^{S} \cap \left(G\left(\bar{x}\right)\right)^{S}.$$

Từ Bổ đề 4.1 (ii) và $u \in \left(G(\bar{x})\right)^{S}$ suy ra

$$u \in \left(\operatorname{co} G(\bar{x})\right)^{S} \subseteq \left(\partial^{MP} \mathcal{G}(\bar{x})\right)^{S},$$

nghĩa là $\left\langle x^{*}, u \right\rangle < 0, \forall x^{*} \in \partial^{MP} \mathcal{G}(\bar{x})$. Điều này dẫn đến $\mathcal{G}^{\Diamond}(\bar{x}) < 0$. Do đó, ta có

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{\mathcal{G}\left(\bar{x} + hu\right) - \mathcal{G}\left(\bar{x}\right)}{h} \leq$$

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^{n}} \limsup_{h \downarrow 0} \frac{\mathcal{G}\left(\bar{x} + h\left(u + v\right)\right) - \mathcal{G}\left(\bar{x} + hv\right)}{h} < 0.$$

Suy ra tồn tại $\delta > 0$ và $\varepsilon > 0$ thỏa mãn

$$\mathcal{G}(\bar{x} + hu) - \mathcal{G}(\bar{x}) \leq -\delta h, \forall h \in (0, \varepsilon).$$

Do đó $\mathcal{G}(\bar{x} + hu) < 0, \forall h \in (0, \varepsilon)$, nghĩa là

$$g_t\left(\bar{x} + hu\right) < 0, \forall t \in T, \forall h \in \left(0, \varepsilon\right).$$

Tương tự, từ $u \in \left(\partial^{MP} f(\bar{x})\right)^{S}$ ta suy ra tồn tại ε' thỏa mãn

$$f(\bar{x} + hu) - f(\bar{x}) < 0, \forall h \in (0, \varepsilon').$$

Ta đặt, từ $\bar{\varepsilon} := \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}$, ta có $\bar{x} + hu \in \Omega, \forall h \in (0, \bar{\varepsilon})$ và $f(\bar{x} + hu) < f(\bar{x})$. Suy ra mâu thuẫn. Vậy (2) không xảy ra. Suy ra từ (2) và Bổ đề 2.2, Mệnh đề 4.1 được chứng minh hoàn toàn. □

Định nghĩa 4.1. Ta nói rằng giả thiết (B) xảy ra tại $\bar{x} \in \Omega$ nếu với tất cả $t \in T$ là nghiệm địa phương của bài toán (P), thì tồn tại $\alpha \geq 0$ và $\lambda \in \Lambda(\bar{x})$ sao cho $\alpha + \sum_{t \in T} \lambda_t = 1$ thỏa mãn

$$0 \notin \partial^{MP} g_t(\bar{x}), \text{ khi } g_t(\bar{x}) = 0.$$

Bổ đề 4.2. Giả sử rằng (SC) và (B) xảy ra với tất cả $x \in \Omega$. Giả sử rằng với mỗi g_t, $t \in T$, là MP chính quy. Khi đó, Ω là tập lồi nếu và chỉ nếu với mọi

$$g_t^{\Diamond}(x, y - x) \leq 0, \forall x, y \in \Omega \text{ với } g_t(\bar{x}) = 0.$$

Chứng minh. Bởi vì $g_t, t \in T$ liên tục và Ω là tập đóng với phần trong khác rỗng. Chứng minh ở bổ đề này tương tự với cách chứng minh của Mệnh đề 2.2 (Dutta và Lalitha, 2013). □

Định nghĩa 4.2. Một điểm được gọi là điểm MP KKT của (P) nếu tồn tại $\lambda \in \Lambda(\bar{x})$ thỏa mãn

$$\partial^{MP} f\left(\bar{x}\right) + \sum_{t \in T} \lambda_t \partial^{MP} g_t\left(\bar{x}\right) = 0.$$

Mệnh đề 4.2. Giả sử rằng (SC) và (B) xảy ra tại $\bar{x} \in \Omega$. Giả sử rằng với mỗi g_t, $t \in T$, là MP chính quy và $\partial^{MP} g_t(\bar{x})$ là nửa liên tục trên theo biến t tại $\bar{x} \in \Omega$. Nếu $\bar{x}$ là nghiệm địa phương của (P) thì nó cũng là một điểm MP KKT của (P).

Chứng minh. Giả sử $\bar{x} \in \Omega$ là nghiệm địa phương của bài toán (P). Suy ra từ Mệnh đề 4.1 tồn tại $\alpha \geq 0$ và $\lambda \in \Lambda(\bar{x})$ sao cho $\alpha + \sum_{t \in T} \lambda_t = 1$ thỏa mãn

$$0 \in \alpha \partial^{MP} f(\bar{x}) + \sum_{t \in T} \lambda_t \partial^{MP} g_t(\bar{x}). \tag{3}$$

Áp dụng tính toán của hàm tựa, ta có

$$\alpha f^{\Diamond}(\bar{x}, d) + \sum_{t \in T} \lambda_t g_t^{\Diamond}(\bar{x}, d) \geq 0, \forall d \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Tiếp theo ta chỉ cần chứng minh $\alpha \neq 0$. Giả sử ngược lại $\alpha = 0$. Khi đó, ta có tập $J := \{t \in T | \lambda_t > 0, \lambda \in \Lambda(\bar{x})\}$ là tập khác rỗng và $g_t(\bar{x}) = 0$ với tất cả $t \in J$. Bởi vì (SC) xảy ra nên tồn tại $\rho > 0$ thỏa mãn $B(\tilde{x}, \rho) \subset \Omega, g_t(\tilde{x}) < 0$ với tất cả $t \in J$ và $g_t(x) < 0, \forall x \in B(\tilde{x}, \rho)$. Từ (4) suy ra

$$\sum_{t \in J} \lambda_t g_t^{\Diamond}(\bar{x}, x - \bar{x}) \geq 0, \forall x \in B(\tilde{x}, \rho).$$

Do đó, từ Mệnh đề 4.1 suy ra $g_t^{\Diamond}(\bar{x},x-\bar{x})=0$ với mọi $t\in J$ và $x\in B(\tilde{x},\rho)$. Với bất kỳ $w\in\mathbb{R}^n$, ta có $\tilde{x}+hw\in B(\tilde{x},\rho)$ với $h>0$ đủ nhỏ. Do đó, với bất kỳ $t\in T$, ta có

$$g_t^{\Diamond}(\bar{x},\tilde{x}-\bar{x})+hg_t^{\Diamond}(\bar{x},w)\geq g_t^{\Diamond}(\bar{x},\tilde{x}+hw-\bar{x})=0.$$

Từ $\tilde{x}\in B(\tilde{x},\rho)\subset\Omega$, ta có $g_t^{\Diamond}(\bar{x},w)\geq 0,\forall t\in T$. Suy ra $0\in\partial^{MP}g_t^{\Diamond}(\bar{x}),\forall t\in T$. Suy ra mâu thuẫn với (B). Vậy mệnh đề được chứng minh. □

Định nghĩa 4.3. (Ye, 2004) f được gọi là giả lồi MP tại $\bar{x}$ nếu với tất cả $x\in\mathbb{R}^n$ thỏa mãn $f^{\Diamond}(\bar{x},x-\bar{x})\geq 0$ ta có $f(x)\geq f(\bar{x})$.

Mệnh đề 4.3. Giả sử rằng (SC) và (B) xảy ra tại $\bar{x}\in\Omega$. Giả sử rằng f là giả lồi MP tại $\bar{x}$ và với mỗi $g_t,t\in T$, là MP chính quy. Nếu $\bar{x}$ là một điểm MP KKT của (P), thì $\bar{x}$ là một nghiệm của (P).

Chứng minh. Giả sử $\bar{x}$ là một điểm MP KKT của (P), thì tồn tại $\lambda\in\Lambda(\bar{x})$ thỏa mãn

$$\partial^{MP}f(\bar{x})+\sum_{t\in T}\lambda_t\partial^{MP}g_t(\bar{x})=0.$$

Thì với mọi $x\in\Omega$, ta có

$$f^{\Diamond}(\bar{x},x-\bar{x})+\sum_{t\in T}\lambda_t g_t^{\Diamond}(\bar{x},x-\bar{x})=$$

$$\max_{x^*\in\partial^{MP}f(\bar{x})+\sum_{t\in T}\lambda_t\partial^{MP}g_t(\bar{x})}\left\langle x^*,x-\bar{x}\right\rangle\geq 0.$$

Từ $\lambda\in\Lambda(\bar{x})$, theo Mệnh đề 4.2 suy ra $g_t^{\Diamond}(\bar{x},x-\bar{x})\leq 0,\forall t\in T$. Suy ra $f^{\Diamond}(\bar{x},x-\bar{x})\geq 0$. Do tính giả lồi MP của f tại $\bar{x}$, mệnh đề được chứng minh. □

Ví dụ 4.1. Giả sử rằng hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định bởi $f(x)=|x-1|$, và tập chấp nhận được Ω được cho bởi

$$\Omega=\left\{x\in\mathbb{R}^2 | g_t(x)\leq 0,t\in T=[0,1]\right\},$$

ở đây $g_t(x)=t\max\left\{x,x^3\right\}-1,t\in[0,1]$. Ta có

$$\Omega=\{x\in\mathbb{R}|x\leq 1\},\quad \partial^{MP}f(x)=[-1,1],$$

$$\partial^{MP}g_t(x)=\left[\min\left\{t,3tx^2\right\},\max\left\{t,3tx^2\right\}\right],t\in[0,1].$$

Do đó, Ω là tập lồi và $g_t,t\in(0,1]$, không phải là một hàm lồi. Với $\bar{x}=1$, ta có $\bar{x}\in\Omega$, $T(\bar{x})=\{1\}$. Vì $g_t,t\in T$ là chính quy Clarke và g_t, $t\in T$ còn là chính quy MP. Ta thấy tất cả các điều kiện trong Mệnh đề 4.2 là được thỏa mãn.

Giả sử $\lambda:T\to\mathbb{R}_+$ được xác định bởi

$$\lambda(t)=\begin{cases}1, & khi\ t=1,\\ 0, & khi\ t\in[0,1).\end{cases}$$

Khi đó $\lambda\in\Lambda(\bar{x})$ và

$$0\in\partial^{MP}f(\bar{x})+\sum_{t\in T}\lambda_t\partial^{MP}g_t(\bar{x})=[-1,1]+1.[1,3]=[0,4].$$

Ngược lại, từ f là hàm lồi, các điều kiện trong Mệnh đề 4.3 là được thỏa mãn. Do đó, ta có điểm KKT còn là một nghiệm của (P).

5 KẾT LUẬN

Trong bài báo này, điều kiện tối ưu cần và đủ cho bài toán tối ưu lồi có tập chấp nhận được lồi được định nghĩa bởi vô hạn ràng buộc bất đẳng thức đã được khảo sát cho cả trong trường hợp trơn và không trơn. Do một tập lồi có thể được xác định bởi giao của vô hạn các tập lồi hoặc giao của vô hạn các tập không lồi, kết quả trong bài báo này là mở rộng tự nhiên của các kết quả trong nghiên cứu của Lasserre (2011); Dutta và Lalitha (2013). Khảo sát điều kiện tối ưu hơn cho bài toán tối ưu với tập ràng buộc lồi dùng dưới vi phân tiếp tuyến (Martinez-Legaz, 2015; Tung, 2018) hoặc dưới vi phân Mordukhovich (2006) là một chủ đề thú vị trong các nghiên cứu tiếp theo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Boyd, S. and Vandenberghe, L., 2004. Convex Optimization. Cambridge University Press, Cambridge.

Caristi, G. and Ferrara, M., 2017. Necessary conditions for nonsmooth multiobjective semi-infinite problems using Michel-Penot subdifferential. Decisions in Economics and Finance 40(1): 103-113.

Chieu, N.H., Jeyakumar, V., Li, G. and Mohebi, H., 2018. Constraint qualifications for convex optimization without convexity of constraints: New connections and applications to best approximation. European Journal of Operational Research 265(1): 19-25.

Clarke, F.H., 1983. Optimization and Nonsmooth Analysis. Wiley, New York.

Dutta, J. and Lalitha, C.S., 2013. Optimality conditions in convex optimization revisited. Optimization Letters 7(2): 221-229.

Giorgi, G., 2013. Optimality conditions under generalized convexity revisited. Annals of the University of Bucharest, Mathematical Series 4(LXII): 479-490.

Goberna, M.A. and Lopez, M.A., 1998. Linear Semi-Infinite Optimization. Wiley, Chichester.

Goberna, M.A., Guerra-Vazquez, F. and Todorov, M.I., 2016. Constraint qualifications in convex vector semi-infinite optimization. European Journal of Operational Research 249(1) : 32-40.

Goberna, M.A. and Kanzi, N., 2017. Optimality conditions in convex multiobjective SIP. Mathematical Programming 164(1): 167-191.

Hiriart-Urruty, J.B. and Lemarechal, C., 1993. Convex Analysis and Minimization Algorithms I. Springer, Berlin.

Kanzi, N., 2014. Constraint qualifications in semi-infinite systems and their applications in nonsmooth semi-infinite problems with mixed constraints. SIAM Journal on Optimization 24(2): 559-572.

Lasserre, J.B., 2011. On representations of the feasible set in convex optimization. Optimization Letters 5(1): 1-5.

Lopez, M.A. and Still, G., 2007. Semi-infinite programming. European Journal of Operational Research 180(2): 491-518.

Martinez-Legaz, J.E., 2015. Optimality conditions for pseudo-convex minimization over convex sets defined by tangentially convex constraints. Optimization Letters 9(5): 1017-1023.

Michel, P. and Penot, J-.P., 1984. Calcus sous-differentiel pour des fonctions Lipschitziennes et non Lipschitziennes. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I -Mathematics 12(2) : 269-272.

Michel, P. and Penot J-.P., 1992. A generalized derivative for calm and stable functions. Differential Integral Equations 5(2): 433-454.

Mordukhovich, B.S., 2006. Variational Analysis and Generalized Differentiation. Vol. I: Basic Theory. Springer, Berlin.

Pshenichnyi, B.N., 1971. Necessary Conditions for an Extremum. Marcel Dekker Inc, New York.

Quyen, H., 2017. Necessary and sufficient KKT optimality conditions in non-convex optimization. Optimization Letters 11(1): 41-61.

Rockafellar R.T., 1970. Convex Analysis. Princeton Math. Ser., vol. 28, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Tung, L.T., 2017. Strong Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions and duality for nonsmooth multiobjective semi-infinite programming via Michel-Penot subdifferential. Journal of Nonlinear Functional Analysis 2017: 1-21.

Tung, L.T., 2018. Strong Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions for multiobjective semi-infinite programming via tangential subdifferential. RAIRO - Operations Research 52(4): 1019-1041.

Yamamoto, S. and Kuroiwa, D., 2016. Constraint qualifications for KKT optimality condition in convex optimization with locally Lipschitz inequality constraints. Linear and Nonlinear Analysis 2(2): 101-111.

Ye, J. J., 2004. Nondifferentiable multiplier rules for optimization and bilevel optimization problems. SIAM Journal on Optimization 15(1): 252-274.