CỰC TRỊ HÀM NHIỀU BIẾN TRONG CÁC MÔ HÌNH KINH TẾ TOÁN

Đào Thị Trang

Trường đại học Công Nghiệp Thực Phẩm TP.HCM

TÓM TẮT

Trong bài viết này, tác giả giới thiệu lại phương pháp tìm cực trị của hàm hai biến và sau đó tổng quát hóa phương pháp cho hàm nhiều hơn hai biến, với mỗi nội dung tác giả đưa ra một số mô hình kinh tế để minh họa. Ý tưởng chung của phương pháp là: thứ nhất, tìm những điểm thỏa điều kiện cần của điểm cực trị; thứ hai, khảo sát dấu của vi phân cấp hai tại những điểm thỏa điều kiện cần để đưa đến kết luận điểm đang xét có phải là cực trị hay không. Vì mục đích ứng dụng nên các kết quả toán học được trình bày không được chứng minh trong bài viết.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong các mô hình kinh tế toán, các loại mô hình tối ưu có vai trò quan trọng, vì quy cho cùng mục đích của hoạt động kinh tế là cái chúng ta bỏ ra phải nhỏ nhất và cái thu vào phải lớn nhất. Công cụ toán học chủ yếu để nghiên cứu các mô hình tối ưu là lý thuyết về cực trị hàm số. Những nội dung vừa nêu đã được giảng dạy trong học phần *mô hình toán kinh tế* ở trường đại học Công Nghiệp Thực Phẩm Thành Phố Hồ Chí Minh. Tuy nhiên, tác giả cho rằng vì nhiều lý do, trong đó có lý do về thời lượng mà các nội dung này được trình bày chưa đầy đủ. Cụ thể, ứng với mỗi dạng của mô hình tối ưu là một tiêu chuẩn tối ưu được nêu ra, điều này gây cảm giác "rời rạc" cho người học. Người học mới bắt đầu khó có thể nhận ra điểm chung cũng như thiết lập mối liên quan giữa các dạng của mô hình tối ưu. Bởi thế, mới có tình huống sinh viên phản hồi khi không giải được bài toán là: "Dạng này em chưa được học" hay "Do em quên tiêu chuẩn tối ưu của nó". Thực tế, tất cả các mô hình tối ưu (kể cả tối ưu hóa tuyến tính) có trong học phần của chúng ta đều có bản chất là bài toán tìm cực trị hàm số có ràng buộc hoặc tự do.

2. NỘI DUNG

Chúng ta bắt đầu với trường hợp đơn giản nhất là cực trị tự do của hàm hai biến, phần này được trình bày tương đối rõ. Các phần tiếp theo là trường hợp tổng quát hóa của phần này nên tác giả chỉ giới thiệu phương pháp và các ví dụ minh họa.

2.1. Cực trị tự do của hàm hai biến

Cho hàm $f(x,y)$ xác định trên $\mathbb{R}^2$ và tồn tại vi phân toàn phần cấp một $df = f_x^{'}dx + f_y^{'}dy$ tại điểm (x_0, y_0). Khi đó, với các số gia $\Delta x, \Delta y$ ta có

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = df(x_0,y_0) + o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right).$$

Ta có điều kiện cần để (x_0, y_0) là điểm cực trị của hàm $f(x,y)$ là $df(x_0,y_0)=0, \forall \Delta x, \Delta y$ hay

$$\begin{cases} f_x^{'}(x_0, y_0) = 0; \\ f_y^{'}(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Khai triển Taylor tại (x_0, y_0) đến vi phân cấp hai ta được

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{2!} + o\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right),$$

Suy ra điều kiện đủ để (x_0, y_0) là điểm cực trị của $f(x, y)$ là:

i) nếu $d^2 f(x_0, y_0) > 0$ thì (x_0, y_0) là điểm cực tiểu

ii) nếu $d^2 f(x_0, y_0) < 0$ thì (x_0, y_0) là điểm cực đại

Do vi phân cấp hai

$$\begin{aligned} d^2 f(x, y) &= f_{xx}^{"} dx^2 + 2 f_{xy}^{"} dx dy + f_{yy}^{"} dy^2 \\ &= \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx}^{"} & f_{xy}^{"} \\ f_{xy}^{"} & f_{yy}^{"} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

nên $d^2 f(x_0, y_0)$ là một dạng toàn phương theo hai biến dx, dy với ma trận là

$$\begin{bmatrix} f_{xx}^{"} & f_{xy}^{"} \\ f_{xy}^{"} & f_{yy}^{"} \end{bmatrix}.$$

Do đó, điều kiện đủ để (x_0, y_0) là điểm cực trị của $f(x, y)$ được phát biểu lại là:

iii) nếu $H_1 = f_{xx}^{"} > 0$ và $H_2 = \begin{vmatrix} f_{xx}^{"} & f_{xy}^{"} \\ f_{xy}^{"} & f_{yy}^{"} \end{vmatrix} > 0$ thì (x_0, y_0) là điểm cực tiểu;

iv) nếu $H_1 = f_{xx}^{"} < 0$ và $H_2 = \begin{vmatrix} f_{xx}^{"} & f_{xy}^{"} \\ f_{xy}^{"} & f_{yy}^{"} \end{vmatrix} > 0$ thì (x_0, y_0) là điểm cực đại.

Bài toán 1. Cho hàm chi phí sản xuất đối với hai mặt hàng là $C = Q_1^3 + Q_2^3 - 6Q_1Q_2$, trong đó Q_1, Q_2 là sản lượng của hai mặt hàng. Tìm mức sản lượng để chi phí sản xuất là nhỏ nhất.

Giải. Ta có điều kiện cần: $\left(Q_1, Q_2\right)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}3Q_1^2-6Q_2=0\\ 3Q_2^2-6Q_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Q_2=\dfrac{1}{2}Q_1^2\\ Q_1=\dfrac{1}{2}Q_2^2\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}(Q_1,Q_2)=(0,0)\\ (Q_1,Q_2)=(2,2)\end{array}\right.$$

Điều kiện đủ: Lập ma trận

$$\begin{bmatrix}C''_{Q_1Q_1} & C''_{Q_1Q_2}\\ C''_{Q_1Q_2} & C''_{Q_2Q_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6Q_1 & -6\\ -6 & 6Q_2\end{bmatrix}$$

Với $(Q_1,Q_2)=(0,0)$, các định thức con chính

$$H_1=6Q_1=0,\ H_2=\begin{vmatrix}6Q_1 & -6\\ -6 & 6Q_2\end{vmatrix}=-36<0,$$

nên $(Q_1,Q_2)=(0,0)$ không phải là điểm cực trị. Với $(Q_1,Q_2)=(2,2)$, các định thức con chính

$$H_1=6Q_1=12>0,\ H_2=\begin{vmatrix}6Q_1 & -6\\ -6 & 6Q_2\end{vmatrix}=108>0.$$

nên $(Q_1,Q_2)=(2,2)$ là điểm cực tiểu. Vậy $(Q_1,Q_2)=(2,2)$ là mức sản lượng làm cho tổng chi phí C đạt cực tiểu.

2.2. Cực trị tự do của hàm n biến

Bài toán: Tìm cực trị hàm số $f(x_1,...,x_n)$ xác định trên một tập mở $D\subseteq\mathbb{R}^n$.

Điều kiện cần: Cho hàm số $f(x_1,...,x_n)$ xác định trên một tập mở $D\subseteq\mathbb{R}^n$, điểm $x^0=(x_1^0,...,x_n^0)\in D$. Giả sử $f(x_1,...,x_n)$ đạt cực trị tự do tại x^0 và tồn tại các đạo hàm riêng cấp một $f'_{x_i},\forall i$ thì $f'_{x_1}\left(x^0\right)=...=f'_{x_n}\left(x^0\right)=0$.

Điều kiện đủ: Giả sử $f(x_1,...,x_n)$ có các các đạo hàm riêng cấp hai $f''_{x_ix_j},\forall i,j=\overline{1,n}$ liên tục trong lân cận điểm x^0 thoả mãn điều kiện cần là $f'_{x_1}\left(x^0\right)=...=f'_{x_n}\left(x^0\right)=0$. Đặt

$$H_k=\begin{vmatrix}f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_k}\\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & \cdots & f''_{x_2x_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f''_{x_kx_1} & f''_{x_kx_2} & & f''_{x_kx_k}\end{vmatrix},$$

i) nếu $H_k > 0, \forall k = \overline{1,n}$ thì $x^0 = (x_1^{\ 0}, ..., x_n^{\ 0})$ là điểm cực tiểu của $f(x_1, ..., x_n)$;

ii) nếu $(-1)^k H_k > 0, \forall k = \overline{1,n}$ thì $x^0 = (x_1^{\ 0}, ..., x_n^{\ 0})$ là điểm cực đại của $f(x_1, ..., x_n)$.

Bài toán 2. Giả sử sản lượng Q của một loại hàng hoá phụ thuộc vào vốn K , lao động L và giá bán P theo công thức $Q = -K^2 - L^2 - P^2 + 12K + 6L + 8P + 5$.

Hãy xác định mức sử dụng các yếu tố đầu vào K, L, P sao cho sản lượng Q đạt giá trị lớn nhất.

Giải. Điều kiện cần: (K, L, P) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} Q_K^{'} = -2K + 12 = 0; \\ Q_L^{'} = -2L + 6 = 0; \\ Q_P^{'} = -2P + 8 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ ta được $(K, L, P) = (6, 3, 4)$.

Điều kiện đủ: Ta có

$$\begin{array}{lll} Q_{KK}^{''} = -2 & Q_{KL}^{''} = 0 & Q_{KP}^{''} = 0 \\ Q_{LK}^{''} = 0 & Q_{LL}^{''} = -2 & Q_{LP}^{''} = 0 \\ Q_{PK}^{''} = 0 & Q_{PL}^{''} = 0 & Q_{PP}^{''} = -2 \end{array}$$

Ta được

$$H_1 = -2 < 0; H_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0; H_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0.$$

Vậy $(K, L, P) = (6, 3, 4)$ là điểm cực đại của Q . Nói cách khác, với mức sử dụng $K = 6,\ L = 3, P = 4$ sẽ làm cho sản lượng Q đạt cực đại.

2.3. Cực trị có điều kiện của hàm nhiều biến

Bài toán: Tìm cực trị của hàm n biến $f(x_1, ..., x_n)$ thoả m điều kiện ($m < n$)

$$\begin{cases} g_1(x_1, ..., x_n) = 0; \\ \cdots \\ g_m(x_1, ..., x_n) = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Đặt

$$L(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m) = f(x_1,...,x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x_1,...,x_n),$$

là hàm $m+n$ biến và được gọi là hàm phụ Lagrange.

Điều kiện cần: Giả sử $f, g_1,..., g_m$ có đạo hàm riêng cấp một tại $(x_1^0,...,x_n^0)$ và f đạt cực trị thoả điều kiện $(*)$ tại $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$. Khi đó tồn tại $\lambda_1^0,...,\lambda_m^0$ sao cho

$$\begin{cases} L'_{\lambda_j}(x^0) = g_j(x^0) = 0, \forall j = \overline{1,m} \\ L'_{x_i}(x_1^0,...,x_n^0,\lambda_1^0,...,\lambda_m^0) = 0, \forall i = \overline{1,n} \end{cases} (**)$$

Điều kiện đủ: Giả sử $(x^0,\lambda^0) = (x_1^0,...,x_n^0,\lambda_1^0,...,\lambda_m^0)$ là nghiệm của hệ $(**)$ và $f, g_1,..., g_m$ có đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại (x^0,λ^0). Đặt

$$H_k = \begin{vmatrix} L''_{x_1x_1} & \cdots & L''_{x_1x_k} & L''_{x_1\lambda_1} & \cdots & L''_{x_1\lambda_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L''_{x_kx_1} & \cdots & L''_{x_kx_k} & L''_{x_k\lambda_1} & \cdots & L''_{x_k\lambda_m} \\ L''_{x_1\lambda_1} & \cdots & L''_{x_k\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L''_{x_1\lambda_m} & \cdots & L''_{x_k\lambda_m} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

khi đó tại điểm tại (x^0,λ^0):

i) nếu $(-1)^m H_k > 0, \forall k = \overline{m+1,n}$ thì hàm f đạt cực tiểu thoả điều kiện $(*)$ tại x^0

ii) nếu $(-1)^k H_k > 0, \forall k = \overline{m+1,n}$ thì hàm f đạt cực đại thoả điều kiện $(*)$ tại x^0

Bài toán 3. Một công ty sản xuất ba sản phẩm với sản lượng lần lượt là *X*, *Y*, *Z*. Hàm tổng chi phí sản xuất cho ba sản phẩm nói trên là $TC = X^2 + 4Y^2 + 2Z^2$. Giá bán ba sản phẩm lần lượt là $p_X = 2, p_Y = 1, p_Z = 3$. Với vốn đầu tư hết là 35, hỏi nhà sản xuất nên điều chỉnh sản lượng mỗi sản phẩm ở mức nào để tổng doanh thu là lớn nhất.

Giải. Ta có mô hình bài toán như sau: Tìm $X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0$ sao cho $R = 2X + Y + 3Z \to Max$ với điều kiện $X^2 + 4Y^2 + 2Z^2 = 35$.

Đặt hàm

$$F = 2X + Y + 3Z + \lambda(X^2 + 4Y^2 + 2Z^2 - 35)$$

Điều kiện cần:

$$\begin{cases} F'_X = 2 + 2X\lambda = 0 \\ F'_Y = 1 + 8Y\lambda = 0 \\ F'_Z = 3 + 4Z\lambda = 0 \\ F'_\lambda = X^2 + 4Y^2 + 2Z^2 - 35 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được hai nghiệm $\left(X, Y, Z, \lambda\right) = \left(4, \frac{1}{2}, 3, \frac{-1}{4}\right)$.

Điều kiện đủ: Bài toán đã cho có $n = 3, m = 1$

$F''_{XX} = 2\lambda$	$F''_{XY} = 0$	$F''_{XZ} = 0$	$F''_{X\lambda} = 2X$
$F''_{YX} = 0$	$F''_{YY} = 8\lambda$	$F''_{YZ} = 0$	$F''_{Y\lambda} = 8Y$
$F''_{ZX} = 0$	$F''_{ZY} = 0$	$F''_{ZZ} = 4\lambda$	$F''_{Z\lambda} = 4Z$

Ta có

$$H_2 = \begin{vmatrix} F''_{XX} & F''_{XY} & F''_{X\lambda} \\ F''_{YX} & F''_{YY} & F''_{Y\lambda} \\ F''_{X\lambda} & F''_{Y\lambda} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2X \\ 0 & 8\lambda & 8Y \\ 2X & 8Y & 0 \end{vmatrix};$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} F''_{XX} & F''_{XY} & F''_{XZ} & F''_{X\lambda} \\ F''_{YX} & F''_{YY} & F''_{YZ} & F''_{Y\lambda} \\ F''_{ZX} & F''_{ZY} & F''_{ZZ} & F''_{Z\lambda} \\ F''_{X\lambda} & F''_{Y\lambda} & F''_{Z\lambda} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 0 & 2X \\ 0 & 8\lambda & 0 & 8Y \\ 0 & 0 & 4\lambda & 4Z \\ 2X & 8Y & 4Z & 0 \end{vmatrix}$$

Tại $\left(X, Y, Z, \lambda\right) = \left(4, \frac{1}{2}, 3, \frac{-1}{4}\right)$ ta được

$$H_2 = \begin{vmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 4 \\ 8 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 136 > 0;$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 12 \\ 8 & 4 & 12 & 0 \end{vmatrix} = -280 < 0.$$

thỏa điều kiện $(-1)^k H_k > 0, k = 2,3$ nên hàm R đạt cực tại $(X,Y,Z) = \left(4, \frac{1}{2}, 3\right)$. Vậy công ty sản xuất các sản phẩm ở mức sản lượng lần lượt $4, \frac{1}{2}, 3$ lúc đó doanh thu sẽ đạt cực đại.

3. KẾT LUẬN

Qua trình bày trên, tác giả hy vọng việc giải quyết các bài toán về mô hình tối ưu trong kinh tế có áp dụng lý thuyết cực trị hàm nhiều biến không còn là vấn đề khó khăn đối với người học. Trong vấn đề này, những việc người học cần phải làm là trước hết, chuyển chính xác mô hình kinh tế thành mô hình kinh tế toán; thứ hai, xác định dạng của bài toán vừa được mô hình hóa xem nó thuộc dạng nào đã nêu trên; cuối cùng, sử dụng phương pháp tương ứng để giải.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Nguyễn Quang Dong, "Giáo trình mô hình toán kinh tế", NXB Thống kê Hà Nội, 2006.

[2]. Phan Quốc Khánh, "Phép tính vi tích phân", Tập 1, NXBGD, 1996.

[3]. Nguyễn Hải Thanh, "Các phương pháp toán kinh tế", trường đại học nông nghiệp Hà Nội, 2008.

[4]. Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright, "Fundamental Methods of Mathematical Economics", New York, 2005.