Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2019.065

TỐC ĐỘ HỘI TỤ TRONG ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM CHO QUÁ TRÌNH MARKOV

Lâm Hoàng Chương[1*], Dương Thị Tuyền[1], Phạm Bích Như[1] và Trần Thị Thiện[2]

[1]*Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*

[2]*Lớp Toán ứng dụng Khóa 42, Trường Đại học Cần Thơ*

**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Lâm Hoàng Chương (email: lhchuong@ctu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 13/11/2018
Ngày nhận bài sửa: 24/11/2018
Ngày duyệt đăng: 27/06/2019

Title:
Rate of convergence in central limit theorem for Markov process in one dimension

Từ khóa:
Định lý giới hạn trung tâm, quá trình Markov, tốc độ hội tụ

Keywords:
Central limit theorem, Markov process, rate of convergence

ABSTRACT

The aim of this paper is to study the model of Markov process in one dimension. The method of moments is here used, asin Depauw et al. (2009) and Lam (2014) to prove that this process conveges in distribution to a normal law (Theorem 1.1) and give its rate also (Theorem 3.1).More precisely, with be the corresponding infinitesimal generator of the previous process and a given function , we solve the Poisson's equation and then treat the limits of its solutions, the rate of the convergence is instantly given by the convergence of the moment.

TÓM TẮT

Mục tiêu chính của bài báo này là nghiên cứu mô hình quá trình Markov trong một chiều. Sử dụng phương pháp như trong các bài báo của Depauw et al. (2009) và Lam Hoang Chuong (2014) để chứng minh sự hội tụ theo phân phối đến phân phối chuẩn của quá trình đang xét (Định lý 1.1) và đưa ra tốc độ hội tụ của nó (Định lý 3.1). Chi tiết hơn, với L *là toán tử Markovcực vicủa quá trình như trên và hàm* f *cho trước, bằng cách giải phương trình Poisson* $Lg = f$ *rồi sau đó tìm giới hạn liên quan đến nghiệm của nó, khi đó tốc độ hội tụ sẽ được cho bởi sự hội tụ của các moment.*

Trích dẫn: Lâm Hoàng Chương, Dương Thị Tuyền, Phạm Bích Như và Trần Thị Thiện, 2019. Tốc độ hội tụ trong định lý giới hạn trung tâm cho quá trình Markov. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 55(3A): 50-55.

1 GIỚI THIỆU

Ta xét một quá trình Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ với không gian trạng thái là tập có cường độ dịch chuyển sang phải hoặc sang trái 1 đơn vị như nhau, hay còn gọi là quá trình Markovcân bằng. Cụ thể hơn, cường độ chuyển của tại vị trí là . Khi $t \to 0$, ta có:

$$\mathbb{P}\{X_{t+s}=k+1|X_s=k\}=\lambda t+o(t),$$

$$\mathbb{P}\{X_{t+s}=k-1|X_s=k\}=\lambda t+o(t),$$

$$\mathbb{P}\{X_{t+s}=k|X_s=k\}=1-2\lambda t+o(t),$$

rong đó: $\lim\limits_{t\to 0}\frac{o(t)}{t}=0$. Khi đó, toán tử cực vi của quá trình đã cho là

$$Lf(k)=\lim_{t\to 0}\frac{P_t f(k)-f(k)}{t}=\lambda f(k+1)+\lambda f(k-1)-2\lambda f(k).$$

với f là hàm đo đượctrên không gian trạng thái $\mathbb{Z}$.

Mô hình bước đi ngẫu nhiên cân bằng là một quá trình ngẫu nhiêncó nhiều ứng dụng trong thực tế. Nó là sự tăng thêm và mất đi một cá thể sau một thời điểm của quần thể nào đó, còn được gọi là quá trình sinh và chết trong sinh học nói chung. Khi ta xét trong vật lý động lực học, nó là sự "di chuyển" ngẫu nhiên của một chất điểm trên dây dẫn đồng chất. Trong lý thuyết trò chơi, đó là sự thắng và thua cuộc với xác suất như nhau, còn được gọi là trò chơi công bằng.

Trong phạm vi bài báo này, chúng ta xét mô hình của một quá trình Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ cân bằng trên không gian trạng thái $\mathbb{Z}$ mà có điều kiện ban đầu $X_0=0$. Khi đó, với hệ số chuẩn hóa, quá trình đã cho sẽ hội tụ theo phân phối đến quy luật chuẩn khi thời gian t đủ lớn. Ta phát biểu định lý đó như sau:

Định lý 1.1 Với mọi bước đi ngẫu nhiên cân bằng, ta luôn có

$$\frac{X_t}{\sqrt{t}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 2\lambda),$$

Khi $t\to+\infty$. Trong biểu thức trên, $\xrightarrow{D}$ ký hiệu cho hội tụ theo phân phối của các biến ngẫu nhiên và $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ là luật phân phối chuẩn với kỳ vọng μ và phương sai σ^2.

Kết quả này cũng đã được đề cập trong bài báo của Kawazu *et al.* (1984) được chứng minh thông qua sự biến đổi thời gian của một chuyển động Brown. Mục tiêu chính của bài báo này là đưa ra tốc độ hội tụ cho Định lý 1.1 thông qua việc sử dụng phương pháp moment.

Cấu trúc của bài báo được sắp xếp như sau: Mục 2 trình bày phương pháp chứng minh được sử dụng trong bài báo; Kết quả chính về tốc độ hội tụ cho Định lý 1.1và chứng minh chi tiết của nó được đưa ra ở Mục 3; Cuối cùng là phần kết luận vấn đề.

2 PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Trong tài liệu của Billingsley (1995) Định lý 30.2 có đề cập đến phương pháp moment trong nghiên cứu định lý giới hạn trong lý thuyết xác suất được trình bày lại như sau

Định lý 2.1 (Billingsley, 1995) ho $(Z_t)_{t\geq 0}$ là các biến ngẫu nhiên cùng xác định trên một không gian xác suất và Z là một biến ngẫu nhiên có luật phân phối xác suất hoàn toàn được xác định bởi các moment của nó . Nếu $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathbb{E}\left(Z_t^{\ell}\right)=\mathbb{E}\left(Z^{\ell}\right)$ với mọi $\ell = 1,2,3,\ldots$ thì Z_t hội tụ theo phân phối đến Z khi $t\to\infty$.

Trong phần tiếp theo, ta sẽ dùng ký hiệu $\aleph$ để chỉ tập hợp các biến ngẫu nhiên có tất cả các moment của nó hữu hạn. Sau đó, ta định nghĩa một ánh xạ $d{:}\aleph\times\aleph\to[0;+\infty]$ sao cho

$$d(X,Y,\ell)=\left|\mathbb{E}\left(X^{\ell}-Y^{\ell}\right)\right|. \quad (2.1)$$

Ta có bổ đề sau:

Bổ đề 2.1 Cho $(Z_t)_{t\geq 0}$ và Z thuộc tập $\aleph$. Nếu $\lim\limits_{t\to+\infty} d(Z_t,Z,\ell)=0$ thì Z_t hội tụ theo phân phối đến Z khi $t\to\infty$.

Chứng minh. Từ công thức (2.1) ta có $d(Z_t,Z,\ell)=\left|\mathbb{E}\left(Z_t^{\ell}-Z^{\ell}\right)\right|$. Áp dụng giả thiết của bổ đề $\lim\limits_{t\to+\infty} d(Z_t,Z,\ell)=0$ nên ta suy ra $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathbb{E}\left(Z_t^{\ell}\right)=\mathbb{E}\left(Z^{\ell}\right)$ với mọi $\ell = 1,2,3,\ldots$. Theo Định lý 2.1 ta được kết luận của Bổ đề 2.1 □

Trong phần tiếp theo, ta sẽ sử dụng ánh xạ d và Bổ đề 2.1 để tìm tốc độ hội tụ trong Định lý 1.3 với $Z_t=X_t/\sqrt{t}$ và $Z\sim\mathcal{N}(0,2\lambda)$.

Liên quan đến toán tử cực vi *L*, ta có các bổ đề sau

Bổ đề 2.2 Cho các hàm f_k, xác định trên ℤ, thỏa

$$\begin{cases} Lf_k(m) = f_{k-1}(m), \\ f_0(m) = 1, \quad m \in \mathbb{Z} \\ f_k(0) = 0, \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Khi đó ta luôn có

$$E\{f_k(X_t)\} = \frac{t^k}{k},$$

với mọi $t \geq 0$.

Chứng minh. Sử dụng phương pháp quy nạp theo k.

Xét $k = 1$

Đặt $h_1(t) = E\{f_1(X_t)\}$ thì

$$E\{Lf_1(X_t)\} = \lim_{s\to 0} E\{\frac{E\{f_1(X_{t+s})|X_t\} - f_1(X_t)}{s}\}$$

$$= \lim_{s\to 0} E\{\frac{f_1(X_{t+s}) - f_1(X_t)}{s}\}$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{h_1(t+s)-h_1(t)}{s} = \frac{dh_1(t)}{dt}.$$

Vì $E\{Lf_1(X_t)\} = 1$ nên $h_{1(t)} = t + \beta_1$ với $t \geq 0$. Hơn nữa $h_1(0) = E\{f_1(X_0)\} = 0$ suy ra $\beta = 0$ dẫn đến $h_1(t) = E\{f_1(X_t)\} = t$.

Giả sử mệnh đề đúng với $k \geq 1$. Ta đặt $h_{k+1}(t) = E\{f_{k+1}(X_t)\}$ thì

$$E\{Lf_{k+1}(X_t)\}$$

$$= \lim_{s\to 0} E\{\frac{E\{f_{k+1}(X_{t+s})|X_t\} - f_{k+1}(X_t)}{s}\}$$

$$= \lim_{s\to 0} E\{\frac{f_{k+1}(X_{t+s}) - f_{k+1}(X_t)}{s}\}$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{h_{k+1}(t+s)-h_{k+1}(t)}{s} = \frac{dh_{k+1}(t)}{dt}.$$

Vì $E\{Lf_{k+1}(X_t)\} = E\{f_k(X_t)\} = \frac{t^k}{k}$ nên $h_{k+1}(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1} + \beta_k$ với $t \geq 0$. Hơn nữa $h_{k+1}(0) = E\{f_{k+1}(X_0)\} = 0$ suy ra $\beta_k = 0$ dẫn đến $h_{k+1}(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1}$.

$$E\{Lf_2(X_t)\} = E\{f_1(X_t)\} = t$$

suy ra $h_2(t) = \frac{t^2}{2} + \beta$ với $t \geq 0$. Hơn nữa $h_2(0) = E\{f_2(X_0)\} = 0$ suy ra $\beta = 0$ dẫn đến $h_2(t) = \frac{t^2}{2}$.

Vậy ta có $E\{f_k(X_t)\} = \frac{t^k}{k}$ với $k = \overline{1,2}$ khi t đủ lớn.

Bổ đề 2.3 Cho các hàm g_k, xác định trên $\mathbb{Z}$, thỏa

$$\begin{cases} Lg_k(m) = g_{k-1}(m), \\ g_0(m) = 0, \ m \in \mathbb{Z} \\ g_k(0) = 0, \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Khi đó ta luôn có

$$E\{f_k(X_t)\} = 0,$$

với mọi $t \geq 0$.

Chứng minh. Tương tự Bổ đề 2.3.

Cuối cùng là bổ đề liên quan đến giới hạn của trung bình Cesaro

Bổ đề 2.4 Cho u_n, v_n là hai dãy số thực dương và một số nguyên không âm $\alpha \in \mathbb{N}$. Giả sử rằng

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} u_\ell = u > 0 \ \ và \ \ \lim_{n\to\infty} v_n = v > 0.$$

Nếu cả u và v đều hữu hạn thì

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{\ell=1}^{n}\ell^\alpha u_\ell v_\ell = \frac{uv}{\alpha+1}. \qquad (2.2)$$

Chứng minh. Với $\alpha = 0$, ta sẽ chỉ ra rằng

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} u_\ell v_\ell = uv.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} u_\ell v_\ell - uv\right| &\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} u_\ell(v_\ell - v)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}(u_\ell - u)v\right| \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} u_\ell |v_\ell - v| + v\left|\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} u_\ell - u\right| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

với mọi $\varepsilon > 0$ khi n đủ lớn. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

Bây giờ ta giả sử rằng (2.2) đúng cho $\alpha \geq 0$, ta mong muốn rằng nó cũng đúng cho $\alpha + 1$, tức là

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha+2}}\sum_{\ell=1}^{n}\ell^{\alpha+1} u_\ell v_\ell = \frac{uv}{\alpha+2}.$$

Đặt $W_n = \sum_{\ell=1}^{n}\ell^\alpha u_\ell v_\ell$, sử dụng phép biến đổi Abel ta có

$$\frac{1}{n^{\alpha+2}}\sum_{\ell=1}^{n}\ell^{\alpha+1}u_\ell v_\ell = -\frac{1}{n^{\alpha+2}}\sum_{\ell=1}^{n-1}W_\ell + \frac{1}{n^{\alpha+1}}W_n = -I_1 + I_2.$$

Theo giả thiết $\lim_{n\to\infty} I_2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}W_n = \frac{uv}{\alpha+1}$, và ta có

$$\begin{aligned} \left|I_1 - \frac{uv}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right| &\leq \frac{1}{n^{\alpha+2}}\sum_{\ell=1}^{n-1}\ell^{\alpha+1}\left|\frac{W_\ell}{\ell^{\alpha+1}} - \frac{uv}{\alpha+1}\right| \\ &\quad + \left|\frac{1}{n^{\alpha+2}}\sum_{\ell=1}^{n-1}\ell^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}\right|\frac{uv}{\alpha+1} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

với mọi $\varepsilon > 0$ khi n đủ lớn bởi vì $\frac{1}{n^{\alpha+2}}\sum_{\ell=1}^{n-1}\ell^{\alpha+1} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n-1}\left(\frac{\ell}{n}\right)^{\alpha+1}$ và cho n tiến tới vô cùng ta sẽ có giới hạn bằng $\int_0^1 x^{\alpha+1}dx = \frac{1}{\alpha+2}$. Từ đó dẫn đến $\lim_{n\to\infty} I_1 = \frac{uv}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$. Vì vậy,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha+2}}\sum_{\ell=1}^{n}\ell^{\alpha+1}u_\ell v_\ell = -\frac{uv}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{uv}{\alpha+1} = \frac{uv}{\alpha+2}$$

và ta chứng minh được (2.2). □

3 KẾT QUẢ THỰC HIỆN

Với mô hình quá trình Markov cân bằng như đã giới thiệu ở Mục 1, ta có kết quả chínhvề tốc độ hội tụ đến phân phối chuẩn của nó như sau

Định lý 3.1 *Ta có*

$$\mathrm{d}\left(\frac{X_t}{\sqrt{t}}, X^*, \ell\right) = \mathrm{O}(t^{-1/2}),$$

trong đó: X^* là biến có phân phối chuẩn với kỳ vọng bằng 0 và phương sai là $\sigma^2 = 2\lambda$.

Ở đây, ta nhắc lại rằng một hàm $\beta(t)=O(\alpha(t))$ nếu như $\lim_{t\to+\infty}\sup|\beta(t)/\alpha(t)|<+\infty$.

Đối với phân phối chuẩn $X^*\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ thì với mỗi $\ell = 1,2,3,\ldots$, ta có

$$\mathbb{E}\left\{X^{*\ell}\right\} = \begin{cases} 0 & khi \quad \ell = 2k-1 \\ \dfrac{(2k)!}{k!2^k}\sigma^{2k} & khi \quad \ell = 2k. \end{cases}$$

Khi đó, với mỗi $\ell = 1,2,3,\ldots$ ta cần đánh giá tốc độ hội tụ của giới hạn của moment bậc ℓ của $X_t/\sqrt{t}$ khi $t\to+\infty$.

Trường hợp moments bậc chẵn, ta có mệnh đề sau

Mệnh đề 3.1 Với mỗi $k \geq 1$, ta có

$$\left|\mathbb{E}\left\{\left(X_t/\sqrt{t}\right)^{2k} - X^{*2k}\right\}\right| = O(t^{-k}).$$

*Chứng minh.*Ta xét một dãy các hàm $f_k \geq 0$, xác định trên $\mathbb{Z}$, sao cho

$$\begin{cases} Lf_k(m)=f_{k-1}(m), & \\ f_0(m)\equiv 1 & m\in\mathbb{Z} \\ f_k(0)=0, & k\geq 1. \end{cases}$$

Chẳng hạn, ta có thể chọn hàm f_1 thỏanhư sau

$$f_1(m) = \frac{m(m-1)}{2\lambda},$$

và với $k \geq 2$ hàm f_k thỏa $f_k(1) = f_k(-1) = 0$

$$f_k(m)=\begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{\ell=1}^{m-1}\sum\limits_{s=1}^{\ell} f_{k-1}(s), & khi \quad m\geq 2 \\ 0, & khi \quad m=-1,0,1 \\ \dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{\ell=2}^{-m}\sum\limits_{s=1}^{\ell-1} f_{k-1}(-s), & khi \quad m\leq -2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Khi đó, với mọi số nguyên m và với $k \geq 1$ ta có

$$Lf_k(m)=f_{k-1}(m).$$

Theo Bổ đề 2.2thì với mỗi $k \geq 1$

$$\mathbb{E}\{f_k(X_t)\}=\frac{t^k}{k!} \quad (3.2)$$

với mọi $t \geq 0$ vì $f_k(0) = 0$ theo định nghĩa của f_k và $X_0=0$ theo giả thiết của bước đi ngẫu nhiên X_n.

Công thức (3.3) có thể viết lại một cách hình thức như sau

$$\mathbb{E}_\omega\left\{\frac{f_k(X_t)}{X_t^{2k}}\times\left(\frac{X_t}{\sqrt{t}}\right)^{2k}\right\}=\frac{1}{k!}.$$

Bổ đề 3.1 Cho $k \geq 1$, với hàm f_k được xác địnhnhư trong (3.1) thì

$$\lim_{m\to\pm\infty}\frac{f_k(m)}{m^{2k}}=\frac{2^k}{(2k)!}\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^k. \quad (3.3)$$

Giới hạn này được ký hiệu là c_k.

Chứng minh. Giới hạn này đúng cho $k = 1$. Thật vậy, với $m > 0$ ta có

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f_1(m)}{m^2}=\lim_{m\to\infty}\frac{m(m-1)}{2m^2\lambda}=\frac{1}{2\lambda}.$$

Giả sử rằng biểu thức (3.3) vẫn đúng cho $k \geq 1$, ta mong muốn nó cũng đúng cho $k+1$, tức là

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f_{k+1}(m)}{m^{2(k+1)}}=\frac{2^{k+1}}{(2k+2)!}\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^{k+1}. \quad (3.4)$$

Ta có

$$\frac{1}{\ell^{2k+1}}\sum_{s=1}^{\ell} f_k(s)=\frac{1}{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\left(\frac{s}{\ell}\right)^{2k}\frac{1}{s^{2k}}f_k(s).$$

Áp dụng Bổ đề 2.4 cho $u_s = 1, v_s = \frac{1}{s^{2k}} f_k(s)$ và $\alpha=2k$ thì biểu thức ở trên hội tụ đến $\frac{2^k}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^k$.

Mặt khác

$$\frac{f_{k+1}(m)}{m^{2(k+1)}} = \frac{1}{m}\frac{1}{\lambda}\sum_{\ell=1}^{m-1}\left(\frac{\ell}{m}\right)^{2k+1}\frac{1}{\ell^{2k+1}}\sum_{s=1}^{\ell} f_k(s).$$

Ta lại áp dụng Bổ đề 2.4 cho $u'_\ell = 1$, $v'_\ell = \frac{1}{\ell^{2k+1}}\sum_{s=1}^{\ell} f_k(s)$ và $\alpha=2k+1$ thì biểu thức ở trên hội tụ đến $\frac{2^{k+1}}{(2k+2)!}\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^{k+1}$. Từ đó dẫn đến kết luận của (3.4).

Tương tự, ta có cùng kết quả cho trường hợp $m < 0$. □

Từ Bổ đề 3.1, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $M>0$ sao cho với mọi $m>M$ thì ta có

$$\left|\frac{m^{2k}}{f_k(m)} - \frac{1}{c_k}\right| < \varepsilon / 2. \quad (3.5)$$

Bây giờ ta chia tập giá trị của X_t ra làm hai phần $\{|X_t|\le M\}\cup\{|X_t|>M\}$ và kết hợp với (3.2), (3.5) ta đánh giá biểu thức

$$\left|\mathbb{E}\left\{\left(\frac{X_t}{\sqrt{t}}\right)^{2k}\right\} - \frac{1}{k!c_k}\right| = \left|\mathbb{E}\left\{\left(\frac{X_t}{\sqrt{t}}\right)^{2k} - \frac{1}{k!c_k}.\frac{f_k(X_t)}{t^k}\right\}\right|.$$

Nếu $\{|X_t|>M\}$ thì biểu thức ở trên có thể được viết lại là

$$\mathbb{E}\left\{\left|\frac{X_n^{2k}}{f_k(X_n)} - \frac{1}{c_k}\right|\frac{f_k(X_n)}{n^k}\right\} < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Nếu $\{|X_n|\le M\}$ thì $f_k(X_t)<\infty$. Từ đó dẫn đến

$$\left|\mathbb{E}\left\{\left(\frac{X_t}{\sqrt{t}}\right)^{2k} - \frac{1}{k!c_k}.\frac{f_k(X_t)}{t^k}\right\}\right| < \frac{C_k}{t^k}$$

với C_k là hằng số dương. Như vậy, ta đi đến kết luận là

$$\left|\mathbb{E}\left\{\left(\frac{X_t}{\sqrt{t}}\right)^{2k}\right\} - \frac{1}{k!c_k}\right| = O(t^{-k}),$$

khi t đủ lớn. Mệnh đề 3.1 đã được chứng minh. □

Trường hợp moments bậc lẻ, ta có mệnh đề sau

Mệnh đề 3.2 Với mỗi $k \ge 1$, ta có

$$\left|\mathbb{E}\left\{\left(X_t/\sqrt{t}\right)^{2k-1}\right\}\right| = O(t^{1/2-k}).$$

Chứng minh. Ta xét một dãy các hàm g_k, xác định trên $\mathbb{Z}$, sao cho

$$\begin{cases} Lg_k = g_{k-1}(m), & \\ g_0(m)=0 & m\in\mathbb{Z} \\ g_k(0)=0, & k\ge 1. \end{cases}$$

Chẳng hạn, ta có thể xác định hàm g_1 như sau

$$g_1(m) = \frac{m}{\lambda},$$

và với $k\ge 2$ hàm g_k như sau

$$g_k(m) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\sum_{\ell=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{\ell} g_{k-1}(s), & khi \quad m\ge 2 \\ 0, & khi \quad m=-1,0,1 \\ \frac{1}{\lambda}\sum_{\ell=2}^{-m}\sum_{s=1}^{\ell-1} g_{k-1}(-s), & khi \quad m\le -2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Khi đó, với mọi số nguyên m và với mỗi $k \ge 1$ ta có

$$Lg_k(m) = g_{k-1}(m).$$

Áp dụng Bổ đề 2.3 ta thấy rằng với mỗi $k \ge 1$ thì

$$\mathbb{E}\{g_k(X_t)\}=0 \quad (3.7) \quad \text{với mọi } t\ge 0.$$

Bổ đề 3.2 Với mỗi $k \ge 1$ và hàm g_k được xác định như trong (3.6) thì

$$\lim_{m\to\pm\infty}\frac{g_k(m)}{m^{2k-1}} = \frac{2^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^k.$$

Giới hạn này được ký hiệu là d_k.

Chứng minh. Tương tự như bổ đề 3.1□

Từ Bổ đề 3.2, với mọi $\varepsilon > 0$, sẽ tồn tại $M>0$ sao cho với mọi $|m|>M$ thì

$$\left|\frac{g_k(m)}{m^{2k-1}d_k} - 1\right| < \varepsilon. \quad (3.8)$$

Bây giờ ta chia tập giá trị của X_t ra làm hai phần $\{|X_t|\le M\}\cup\{|X_t|>M\}$ và kết hợp với (3.7), (3.8) ta đánh giá biểu thức

$$\left|\mathbb{E}\left\{\left(\frac{X_t}{\sqrt{t}}\right)^{2k-1}\right\}\right| = \left|\mathbb{E}\left\{\frac{1}{(\sqrt{t})^{2k-1}}\left(X_t^{2k-1} - \frac{g_k(X_t)}{d_k}\right)\right\}\right|.$$

Nếu $\{|X_t|>M\}$ thì biểu thức ở trên có thể được viết lại là

$$\mathbb{E}\left\{\left(\frac{|X_t|}{\sqrt{t}}\right)^{2k-1}\left|1-\frac{g_k(X_t)}{X_t^{2k-1}d_k}\right|\right\} < \varepsilon\sqrt{\mathbb{E}\left\{\left(\frac{X_t}{\sqrt{t}}\right)^{2(2k-1)}\right\}}$$

khi n đủ lớn. Nếu $\{|X_t|\le M\}$ thì $g_k(X_t)<\infty$. Từ đó dẫn đến

$$\mathbb{E}\left\{\frac{1}{(\sqrt{t})^{2k-1}}\left|X_t^{2k-1} - \frac{g_k(X_t)}{d_k}\right|\right\} < \frac{D_k}{t^{k-1/2}},$$

với D_k là hằng số dương. Theo Mệnh đề 3.1, biểu trong căn bậc hai sau cùng bị chặn nên ta đi đến kết luận là

$$\left|\mathbb{E}\left\{\left(\frac{X_t}{\sqrt{t}}\right)^{2k-1}\right\}\right| = O(t^{1/2-k})$$

khi t đủ lớn. □

Từ bậc hội tụ trong hai Mệnh đề 3.1 và 3.2 ta suy ra bậc hội tụ của Định lý 3.1. Như vậy, định lý chính về tốc độ hội tụ đã được chứng minh.

4 KẾT LUẬN

Bài báo đã đánh giá được tốc độ hội tụ của định lý giới hạn trung tâm cho quá trình Markov trên không gian trạng thái $\mathbb{Z}$ với bậc là $O(t^{-1/2})$ thông qua cách xác định ánh xạ d dựa vào phương pháp moment. Ngoài ra, điểm mấu chốt trong bài toán này ở chỗ ta có thể giải được phương trình Poisson tương ứng với toán tử cực vi L . Chúng tôi kỳ vọng phương pháp này có thể được áp dụng cho các bài toán khác có liên quan.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Billingsley, P., 1995. Probability and measure, Third Edition. New York, 593 pages.

Chuong, L.H., 2014. A quenched central limit theorem for reversible random walk in random environment on Z. Journal of Applied Probability. 51: 1051-1064.

Depauw J. and Derrien J. M., 2009. Variance limite d'une marche aléatoire réversible en milieu aléatoire sur Z. Comptes Rendus Mathematique. 347(7-8): 401–406.

Kawazu, K. and Kesten, H., 1984. On birth and death processes in symmetric random environment. J. Statist. Phys. 37: 561–576.