Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
website: sj.ctu.edu.vn

TÍNH NỬA LIÊN TỤC CỦA HÀM VECTOR VÀ CÁC TÍNH CHẤT NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTOR

Đặng Thị Mỹ Vân
Khoa Sư phạm, Trường Cao đẳng Cần Thơ

Thông tin chung:
Ngày nhận: 03/03/2016
Ngày chấp nhận: 25/07/2016

Title:
On the semicontinuity of vector mappings and properties of the solutions to vector equilibrium problems

Từ khóa:
Nửa liên tục trên/dưới theo nón thứ tự, bài toán cân bằng, tính ổn định, sự đặt chỉnh theo các nhiễu, sự đặt chỉnh duy nhất theo các nhiễu

Keywords:
Upper/lower semicontinuity involving ordered cone, equilibrium problems, stability, well-posedness under perturbations, uniquely well-posed under perturbations

ABSTRACT

In this paper, we study some important properties of the upper and lower semicontinuity involving ordered cone of vector mappings. Using these generalized semicontinuities mappings together with some assumptions related to continuity property, we investigate the properties of the solutions to weak and strong vector equilibrium problems in normed space. All the kinds of properties are considered such as the compactness of the solution sets, the upper semicontinuity of the solution mappings and the well-posedness for the considered problems.

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu các tính chất của các hàm vector nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới theo nón thứ tự. Sử dụng các hàm nửa liên tục suy rộng này cùng với một số giả thiết liên quan đến tính liên tục, chúng tôi đã nghiên cứu các tính chất của nghiệm bài toán cân bằng vector mạnh và cân bằng vector yếu trong không gian định chuẩn. Các tính chất được khảo sát ở đây bao gồm: tính compact của các tập nghiệm, tính nửa liên tục trên của các ánh xạ nghiệm và các dạng đặt chỉnh của các bài toán được xem xét.

Trích dẫn: Đặng Thị Mỹ Vân, 2016. Tính nửa liên tục của hàm vector và các tính chất nghiệm của bài toán cân bằng vector. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 44c: 1-8.

1 MỞ ĐẦU

Khái niệm liên tục, bao gồm tính liên tục, liên tục đều, liên tục Lipschitz, liên tục Hölder, của hàm số là một trong các khái niệm đặc biệt quan trọng của toán học. Tính liên tục là công cụ chính yếu trong việc nghiên cứu các chủ đề quan trọng của các lớp bài toán, như sự tồn tại nghiệm, tính ổn định nghiệm, sự đặt chỉnh và thuật toán tìm nghiệm,… Trong toán học nói chung và trong tối ưu hoá nói riêng, việc mở rộng từ trường hợp bài toán vô hướng sang trường hợp bài toán vector là yêu cầu cần thiết, nhằm đáp ứng được các tình huống đặt ra trong thực tế. Tất nhiên, khi nghiên cứu các lớp bài toán mở rộng này, các khái niệm của hàm vô hướng của dữ liệu bài toán, cũng được mở rộng tương ứng sang trường hợp hàm có giá trị vector, hàm đa trị,… Khi khảo sát các bài toán thực tế, các dữ liệu thường không thoả mãn các điều kiện liên tục, và do đó việc giảm nhẹ khái niệm liên tục là cần thiết. Để giải quyết vấn đề này, các nhà toán học đã sử dụng đến các khái niệm về giới hạn dưới (liminf) và giới hạn trên (limsup) của dãy để xây dựng các khái niệm nửa liên tục (dưới và trên) cho hàm số thực. Từ ý tưởng đó, các khái niệm về tính liên tục suy rộng cho hàm vector cũng được rất nhiều người quan tâm đề xuất. Tuy nhiên, chưa có bài báo nào khảo sát một cách tương đối đầy đủ các tính chất của hàm vector nửa liên tục được thác triển từ lớp hàm số thực nửa liên tục như trên.

Trong những năm gần đây, tối ưu hoá là một trong những lĩnh vực phát triển rất mạnh của toán học, nhằm đáp ứng các yêu cầu thực tế của nhiều lĩnh vực trong cuộc sống như kinh tế, xã hội, y học,… Một trong các bài toán được sử dụng để nghiên cứu các mô hình toán học của các bài toán ứng dụng là bài toán cân bằng, bài toán này được giới thiệu vào năm 1994 (xem Blum and Oettli, 1994). Mô hình bài toán cân bằng là dạng hợp nhất của nhiều bài toán khác nhau, như bài toán tối ưu, bài toán cạnh tranh trong kinh tế, lý thuyết trò chơi, bài toán mạng giao thông,… Bên cạnh các chủ đề về sự tồn tại nghiệm (xem Ansari *et al.,* 2001; Fu and Wan, 2002), tính ổn định và phân tích độ nhạy nghiệm (xem Ait Mansour and Riahi, 2005; Anh and Khanh, 2004, 2006, 2007,2008; Bianchi and Pini, 2003), thuật toán tìm nghiệm (xem Anh *et al.,* 2013; Iusem and Sosa, 2010; Muu and Quy, 2015; Quoc *et al.,* 2008), thì sự đặt chỉnh của lớp bài toán cân bằng cũng dành được nhiều sự quan tâm nghiên cứu trong thời gian gần đây. Sự đặt chỉnh có thể hiểu theo hai nghĩa cơ bản sau. Nghĩa thứ nhất đã được Hadamard giới thiệu vào năm 1902 (xem Hadamard, 1902), đó là sự tồn tại duy nhất nghiệm và sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào dữ liệu của nghiệm bài toán tối ưu. Năm 1966, Tikhonov đã đề xuất khái niệm đặt chỉnh cho bài toán tối ưu không có ràng buộc, mà ngày nay được gọi là đặt chỉnh Tikhonov. Bài toán được gọi là đặt chỉnh Tikhonov nếu nó có nghiệm duy nhất và mọi dãy nghiệm xấp xỉ đều hội tụ về nghiệm duy nhất của bài toán (xem Tikhonov, 1966). Từ hai dạng cơ bản của sự đặt chỉnh, cho đến nay đã được phát triển và mở rộng rất nhiều, nhằm đáp ứng ngày càng tốt hơn khi khảo sát các bài toán thực tế trong cuộc sống (xem Anh *et al.*, 2012, 2013; Kimura *et al.*, 2008; Zolezzi, 1995, 2001 và các tài liệu tham khảo trong đó).

Từ những sự quan sát ở trên, trong bài báo này chúng tôi giới thiệu và nghiên cứu các tính chất của hàm vector nửa liên tục trong không gian được sắp thứ tự theo nón. Đề xuất khái niệm mới về sự đặt chỉnh cho lớp bài toán cân bằng vector. Sử dụng tính chất của hàm vector nửa liên tục suy rộng để nghiên cứu tính compact của tập nghiệm, tính nửa liên tục của ánh xạ nghiệm và sự đặt chỉnh của lớp bài toán cân bằng trong không gian được sắp thứ tự theo nón.

Cấu trúc của bài báo được trình bày như Mục 2 trình bày mô hình các bài toán cân bằng vector, giới thiệu khái niệm đặt chỉnh và nhắc lại các khái niệm và tính chất cần thiết được dùng trong phần tiếp theo. Mục 3 giới thiệu khái niệm hàm vector nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới trong không gian được sắp thứ tự theo nón và nghiên cứu các tính chất của chúng. Các kết quả về điều kiện cần và đủ cho tính compact của các tập nghiệm, tính ổn định và sự đặt chỉnh của bài toán cân bằng được trình bày trong Mục 4. Mục 5 đưa ra các nhận xét về kết quả đạt được của bài báo và một số định hướng nghiên cứu phát triển từ các kết quả chính của bài báo.

2 BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTOR

Cho Y là một không gian vector topo. Tập con $A \subset Y$ được gọi là *tập lồi*, nếu với mỗi $x, y \in A$ và $\lambda \in [0; 1]$, ta luôn có $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$.

Định nghĩa 2.1 (Göpfert *et al.*, 2003). Cho Y là một không gian vector topo.Tập con $C \subset Y$, $C \neq \emptyset$, được gọi là *nón* nếu với mỗi $x \in C$ và $\lambda \in (0, +\infty)$ ta luôn có $\lambda x \in C$.

Nón C được gọi là *nón lồi, đóng* nếu C là tập lồi, đóng (tương ứng).

Nón C được gọi là nón có đỉnh nếu $C \cap (-C) = \{0\}$.

Trong Y với nón lồi, đóng, có đỉnh $C \subset Y$, ta xét quan hệ sau:

$$x, y \in Y: x \geq_C y \Leftrightarrow x - y \in C.$$

Khi đó, quan hệ "$\geq_C$" là một quan hệ thứ tự (từng phần) trong Y. Trong trường hợp, $C \cup (-C) = Y$, thì quan hệ trên sẽ trở thành quan hệ thứ tự toàn phần, tức là, với mọi cặp $x, y \in Y$, ta luôn có $x \geq_C y$ hoặc $y \geq_C x$. Không gian Y với quan hệ $\geq_C$, được gọi là không gian sắp thứ tự theo nón. Trong không gian sắp thứ tự theo nón, với $x, y \in Y$, ta định nghĩa:

$$x >_C y \Leftrightarrow x - y \in \text{int}C,$$

$$x \leq_C y \Leftrightarrow x - y \in -C,$$

$$x <_C y \Leftrightarrow x - y \in -\text{int}C.$$

Cho X, Y là các không gian vector topo, phép cho tương ứng F mỗi phần tử $x \in X$ với duy nhất tập con, ký hiệu bằng $F(x)$, trong Y được gọi là *ánh xạ có giá trị tập* (hay *ánh xạ đa trị*) từ X vào Y và được ký hiệu là $F: X \rightrightarrows Y$. Khi đó X được gọi là miền xác định của F và tập $\text{graph}F = \{(x, y) \in X \times Y: y \in F(x)\}$ được gọi là *đồ thị* của

F. Ánh xạ đa trị F được gọi là lồi, đóng nếu đồ thị của nó tương ứng là tập con lồi, đóng trong $X \times Y$.

Định nghĩa 2.2 (Aubin and Frankowska, 1990). Cho X, Y là các không gian vector topo và $Q: X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị.

(a) Q được gọi là *nửa liên tục trên* (usc) tại $x_0 \in X$, nếu với mỗi lân cận U của $Q(x_0)$, luôn tồn tại lân cận N của x_0 sao cho $Q(x) \subset U$, với mọi $x \in N$.

(b) Q được gọi là *nửa liên tục dưới* (lsc) tại $x_0 \in X$, nếu với mỗi lân cận U với $Q(x_0) \cap U \neq \emptyset$, luôn tồn tại lân cận N của x_0 sao cho $Q(x) \cap U \neq \emptyset$, với mọi $x \in N$.

Q được gọi là *liên tục* tại x_0 nếu nó vừa nửa liên tục trên và vừa nửa liên tục dưới tại x_0.

Q được gọi là thoả mãn một tính chất α nào đó trong tập con $A \subset X$, nếu Q thoả mãn tính chất đó tại mọi điểm $x \in A$. Trong trường hợp $A = X$ ta bỏ qua cụm từ "trong X" trong phát biểu.

Bổ đề 2.1 (Aubin and Frankowska, 1990). Cho X, Y là các không gian metric và ánh xạ đa trị $Q: X \rightrightarrows Y$.

(i) Q là usc tại x_0, nếu với mỗi lân cận U của $Q(x_0)$, với mỗi dãy $\{x_n\}$ trong X hội tụ đến x_0, luôn tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho, với mỗi $n \geq n_0$ ta có $Q(x_n) \subset U$.

(ii) Q là lsc tại x_0, nếu với mỗi dãy $\{x_n\}$ trong X hội tụ đến x_0 và với mỗi $y_0 \in Q(x_0)$, luôn tồn tại dãy $\{y_n\}$, $y_n \in Q(x_n)$ sao cho $y_n \to y_0$ khi $n \to \infty$.

Định nghĩa 2.3 (Hu and Papageorgiou, 1997). Cho X, Y là các không gian vector topo, và $Q: X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị.

(a) Q được gọi là *nửa liên tục trên Hausdorff* (H-usc) tại x_0, nếu với mỗi lân cận B của gốc trong Y, luôn tồn tại lân cận N của x_0 sao cho, $Q(x) \subset Q(x_0) + B$, với mỗi $x \in N$.

(b)Q được gọi là *nửa liên tục dưới Hausdorff* (H-lsc) tại x_0, nếu với mỗi lân cận B của gốc trong Y, luôn tồn tại lân cận N của x_0 sao cho, $Q(x_0) \subset Q(x) + B$, với mỗi $x \in N$.

Q được gọi là *liên tục* Hausdorff tại x_0, nếu nó vừa H-usc và vừa H-lsc tại x_0.

Cho X, Λ là các không gian metric và Y là không gian định chuẩn, $C \subset Y$ là một nón lồi, đóng, có đỉnh và $\text{int}C \neq \emptyset$. Cho $K: \Lambda \rightrightarrows X$ là ánh xạ có giá trị tập hợp và $e: \Lambda \to C$ là một ánh xạ liên tục. Cho $f: X \times X \times \Lambda \to Y$ là một hàm vector. Với mỗi $\lambda \in \Lambda$, ta xét các *bài toán cân bằng vector yếu và mạnh* tương ứng sau:

(WEP_λ) Tìm $x_0 \in K(\lambda)$, sao cho

$$f(x_0, y, \lambda) \nless_C 0, \forall y \in K(\lambda).$$

(SEP_λ) Tìm $x_0 \in K(\lambda)$, sao cho

$$f(x_0, y, \lambda) \geq_C 0, \forall y \in K(\lambda).$$

Để đơn giản, thay vì ký hiệu họ các bài toán trên bởi $\{(\text{WEP}_\lambda): \lambda \in \Lambda\}$ và $\{(\text{SEP}_\lambda): \lambda \in \Lambda\}$, ta sẽ ký hiệu các tập hợp đó bằng (**WEP**) và (**SEP**), tương ứng. Với mỗi $\lambda \in \Lambda$, các tập nghiệm của các bài toán (WEP_λ) và (SEP_λ) lần lượt được ký hiệu bởi $S^w(\lambda)$ và $S^s(\lambda)$, tức là

$$S^w(\lambda) = \{x \in K(\lambda): f(x_0, y, \lambda) \nless_C 0, \forall y \in K(\lambda)\},$$

$$S^s(\lambda) = \{x \in K(\lambda): f(x_0, y, \lambda) \geq_C 0, \forall y \in K(\lambda)\}.$$

Định nghĩa 2.4. Cho $\lambda \in \Lambda$ và dãy $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ là dãy hội tụ đến λ. Dãy $\{x_n\}, x_n \in K(\lambda_n)$, được gọi là một dãy xấp xỉ của bài toán (WEP_λ) (hay (SEP_λ)) tương ứng với dãy $\{\lambda_n\}$, nếu tồn tại dãy số thực dương $\{\varepsilon_n\}$ hội tụ về 0 sao cho, với mỗi n và với mỗi $y \in K(\lambda_n)$, ta luôn có

$$f(x_n, y, \lambda_n) + \varepsilon_n e(\lambda_n) \nless_C 0,$$

$$(f(x_n, y, \lambda_n) + \varepsilon_n e(\lambda_n) \geq_C 0, \text{tương ứng}).$$

Định nghĩa 2.5. Bài toán (**WEP**) (hay, (**SEP**)) được gọi là *đặt chỉnh theo các nhiễu* (hay ngắn gọn, *đặt chỉnh*), nếu với mỗi $\lambda \in \Lambda$,

(a) bài toán (WEP_λ) (tương ứng, (SEP_λ)) có nghiệm;

(b) với mỗi dãy $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ hội tụ đến λ, với mỗi dãy xấp xỉ $\{x_n\}$ của bài toán (WEP_λ) (hay, (SEP_λ)) tương ứng với dãy $\{\lambda_n\}$, luôn tồn tại dãy con hội tụ đến một phần tử của tập nghiệm $S^w(\lambda)$ (tương ứng, $S^s(\lambda)$).

Định nghĩa 2.6. Bài toán (**WEP**) (hay (**SEP**)) được gọi là *đặt chỉnh duy nhất theo các nhiễu* (hay ngắn gọn, *đặt chỉnh duy nhất*), nếu với mỗi $\lambda \in \Lambda$,

(a) bài toán (WEP_λ) (tương ứng, (SEP_λ)) có nghiệm duy nhất;

(b) với mỗi dãy $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ hội tụ đến λ, với mỗi dãy xấp xỉ $\{x_n\}$ của bài toán (WEP_λ) (hay, (SEP_λ)) tương ứng với dãy $\{\lambda_n\}$, luôn hội tụ đến nghiệm duy nhất của bài toán (WEP_λ) (tương ứng, (SEP_λ)).

Với mỗi $\lambda \in \Lambda$, $\varepsilon \geq 0$, ta ký hiệu các tập ε-nghiệm của các bài toán (WEP_λ) và (SEP_λ) lần lượt bởi $\hat{S}^w(\lambda, \varepsilon)$ và $\hat{S}^s(\lambda, \varepsilon)$, nghĩa là

$$\hat{S}^w(\lambda,\varepsilon)=\{x\in K(\lambda): f(x,y,\lambda)+\varepsilon e(\lambda)\not<_C 0, \forall y \in K(\lambda)\},$$

$$\hat{S}^s(\lambda,\varepsilon)=\{x\in K(\lambda): f(x,y,\lambda)+\varepsilon e(\lambda)\geq_C 0, \forall y \in K(\lambda)\}.$$

3 TÍNH NỬA LIÊN TỤC CỦA HÀM VECTOR

Trong mục này chúng tôi xét lớp các hàm vector nửa liên tục theo nón và nghiên cứu các tính chất cơ bản của các lớp hàm này.

Cho dãy số thực $\{x_k\}$, đặt $y_m=\sup\{x_k: k\geq m\}$ và $z_m=\inf\{x_k: k\geq m\}$. Khi đó, các dãy $\{y_m\}$ và $\{z_m\}$ tương ứng là các dãy không tăng và không giảm. Do đó, nếu dãy $\{x_k\}$ bị chặn thì hai dãy trên có giới hạn và khi đó ta gọi các giới hạn đó lần lượt là các giới hạn trên và giới hạn dưới của dãy, và ký hiệu là $\lim_{m\to\infty} y_m=\operatorname{limsup}_{k\to\infty} x_k$ và $\lim_{m\to\infty} z_m=\operatorname{liminf}_{k\to\infty} x_k$.

Định nghĩa 3.1 (Morgan and Scalzo, 2006). Cho X là không gian metric và $f: X\to R$.

(a) f được gọi là nửa liên tục trên tại $x_0\in X$, nếu với mọi dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến x_0, ta luôn có $f(x_0)\geq \operatorname{limsup}_{k\to\infty} f(x_k)$.

(b) f được gọi là *nửa liên tục dưới* tại $x_0\in X$, nếu $-f$ nửa liên tục trên tại x_0, hay một cách tương đương, với mọi dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến x_0, ta luôn có $f(x_0)\leq \operatorname{liminf}_{k\to\infty} f(x_k)$.

Từ định nghĩa ta thấy rằng, f liên tục tại x_0, tức là $f(x_0)=\lim_{k\to\infty} f(x_k)$, nếu và chỉ nếu f là nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới tại x_0.

Từ Định nghĩa 3.1, ta dễ dàng chứng minh được mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 3.1. Cho hàm số $f: X\to R$. Khi đó,

(i)f nửa liên tục trên trong X, nếu và chỉ nếu tập mức $lev_{\geq a}f=\{x\in X: f(x)\geq a\}$ đóng trong X, với mọi $a\in R$.

(ii)f nửa liên tục dưới trong X, nếu và chỉ nếu tập mức $lev_{\leq a}f=\{x\in X: f(x)\leq a\}$ đóng trong X, với mọi $a\in R$.

Lấy ý tưởng từ khái niệm nửa liên tục cho hàm số thực, ta xây dựng các khái niệm nửa liên tục của hàm vector trong không gian được sắp thứ tự theo nón như sau.

Định nghĩa 3.2. Cho X là không gian metric và Y là không gian định chuẩn, $C\subset Y$ là một nón lồi, đóng, có đỉnh và ánh xạ $f: X\to Y$.

(a) f được gọi C-*nửa liên tục trên* (C-usc) tại $x_0\in X$, nếu với mỗi lân cận V của gốc trong Y, luôn tồn tại một lân cận U của x_0, sao cho với mỗi $x\in U$, ta luôn có

$$f(x)\in f(x_0)+V-C.$$

(b) f được gọi C-*nửa liên tục dưới* (C-lsc) tại $x_0\in X$, nếu $-f$ là C-nửa liên tục trên tại x_0, hay một cách tương đương, với mỗi lân cận V của gốc trong Y, luôn tồn tại một lân cận U của x_0, sao cho với mỗi $x\in U$, ta luôn có

$$f(x)\in f(x_0)+V+C.$$

f được gọi là C-*liên tục* tại x_0 nếu f vừa là C-usc và vừa C-lsc tại x_0.

Định lý 3.1. Cho X, Y, C và f như trong Định nghĩa 3.2. Khi đó, các điều kiện sau đây là tương đương.

(i) f là C-nửa liên tục trên trong X.

(ii) Với mỗi $x_0\in X$ và $d\in intC$, tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho

$$f(x)\in f(x_0)+d-intC, \forall x\in U.$$

(iii) Với mỗi $x_0\in X$ và $a\in Y$, $f^{-1}(a-intC)$ là tập mở trong X.

Chứng minh. Trước tiên ta chứng minh (i) và (ii) là tương đương với nhau.

$(i)\Longrightarrow(ii)$: Xét $x_0\in X$ và $d\in \operatorname{int}C$. Đặt $V=d-\operatorname{int}C$. Khi đó V là một lân cận của gốc trong Y. Theo (i), ta suy ra tồn tại lân cận U của x_0 sao cho

$$f(x)\in f(x_0)+V-C, \forall x\in U.$$

Vì C là nón lồi nên $-\operatorname{int}C-C=-\operatorname{int}C$, nên ta suy ra

$f(x)\in f(x_0)+d-\operatorname{int}C, \forall x\in U$, tức là, (ii) nghiệm đúng.

$(ii)\Longrightarrow(i)$: Lấy $x_0\in X$ và V là một lân cận của gốc trong Y. Vì C là nón với phần trong khác rỗng, nên tồn tại $d\in\operatorname{int}C$ sao cho $d\in V$. Theo giả thiết (ii), tồn tại lân cận U của x_0 sao cho

$f(x)\in f(x_0)+d-\operatorname{int}C, \forall x\in U,$ và do đó,

$f(x)\in f(x_0)+V-C, \forall x\in U$, tức là, (i) thoả mãn.

Bây giờ ta chứng minh (ii) và (iii) là tương đương với nhau.

$(iii)\Longrightarrow(ii)$: Giả sử với mỗi $a\in Y$, $f^{-1}(a-\operatorname{int}C)$ là tập mở. Lấy $d\in\operatorname{int}C$, và $x_0\in X$, ta có

$x_0 \in f^{-1}(f(x_0) + d - \text{int}C)$. Vì $f^{-1}(f(x_0) + d - \text{int}C)$ là tập mở, nên tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho $U \subset f^{-1}(f(x_0) + d - \text{int}C)$, nghĩa là

$f(x) \in f(x_0) + d - \text{int}C, \forall x \in U$, tức là, (ii) thoả mãn.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$: Với mỗi $a \in Y$ và $x_0 \in f^{-1}(a - \text{int}C)$. Đặt $d = a - f(x_0)$. Khi đó, $d \in \text{int}C$. Theo giả thiết (ii), ta suy ra tồn tại lân cận U của x_0 sao cho

$$f(x) \in f(x_0) + d - \text{int}C, \forall x \in U.$$

Từ đó suy ra,

$$U \subset f^{-1}(f(x_0) + d - \text{int}C).$$

Vì vậy, $f^{-1}(a - \text{int}C)$ là tập mở trong X.

Đối với tính nửa liên tục dưới ta cũng có kết quả tương tự sau đây.

Định lý 3.2. Cho X, Y, C và f như trong Định nghĩa 3.2. Khi đó, các điều kiện sau đây là tương đương.

(i) f là C-nửa liên tục dưới trong X.

(ii) Với mỗi $x_0 \in X$ và $d \in intC$, tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho

$$f(x) \in f(x_0) - d + intC, \forall x \in U.$$

(iii) Với mỗi $x_0 \in X$ và $a \in Y$, $f^{-1}(a + intC)$ là tập mở trong X.

Chứng minh. Do kỹ thuật chứng minh tương tự như trong chứng minh của Định lý 3.1, nên ta bỏ qua việc trình bày chi tiết cho việc chứng minh định lý trên.

Nhận xét 3.1. Từ Mệnh đề 3.1 và các Định lý 3.1 và 3.2 ta thấy rằng trong trường hợp đặc biệt, khi $Y = R$ và $C = [0, +\infty)$, thì các khái niệm C-nửa liên tục trên và C-nửa liên tục dưới, tương ứng trở thành các khái niệm nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới theo nghĩa thông thường của hàm số thực (trong Định nghĩa 3.1).

Kết quả sau đây cho phép ta có thể thực hiện các phép tính cơ bản trên các lớp hàm vector nửa liên tục trong không gian được sắp thứ tự theo nón.

Định lý 3.3. Cho X, Y, C như trong Định nghĩa 3.2 và $f, g: X \to Y$ là các hàm vector. Khi đó, nếu f và g là các hàm C-nửa liên tục trên trong X thì,

(i) $f + g$ là C-nửa liên tục trên trong X;

(ii) với mỗi số thực $k \in (0, +\infty), kf$ là C-nửa liên tục trên trong X.

Chứng minh.

(i) Với mỗi $x_0 \in X$ và $d \in \text{int}C$. Vì f, g là các hàm nửa liên tục trên, nên tồn tại các lân cận U_1, U_2 của x_0 sao cho

$$f(x) \in f(x_0) + \frac{1}{2}d - \text{int}C, \forall x \in U_1,$$

$$g(x) \in g(x_0) + \frac{1}{2}d - \text{int}C, \forall x \in U_2.$$

Do đó,

$$f(x) + g(x) \in f(x_0) + g(x_0) + d - intC, \forall x \in U = U_1 \cap U_2.$$

Theo Định lý 3.1 ta suy ra $f + g$ là C-usc trong X.

(ii) Lập luận tương tự ta cũng thu được tính C-usc của hàm vector kf với mỗi $k \in (0, +\infty)$.

Với các lập luận tương tự như trong chứng minh của Định lý 3.3, ta thu được kết quả sau đây đối với lớp hàm vector nửa liên tục dưới.

Định lý 3.4. Cho X, Y, C như trong Định nghĩa 3.2 và $f, g: X \to Y$ là các hàm vector. Khi đó nếu f và g là các hàm C-nửa liên tục dưới trong X thì,

(i) $f + g$ là C-nửa liên tục dưới trong X.

(ii) Với mỗi số thực $k \in (0, +\infty), kf$ là C-nửa liên tục dưới trong X.

4 SỰ ĐẶT CHỈNH CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Vì điều kiện tồn tại nghiệm cho lớp các bài toán cân bằng đã được nghiên cứu sâu rộng (xem Ansari *et al.,* 2001; Fu and Wan, 2002, và các tài liệu tham khảo trong đó), nên trong mục này ta chỉ tập trung nghiên cứu các điều kiện cho các tính chất nghiệm, bao gồm các tính chất compact của các tập nghiệm, tính nửa liên tục và các dạng đặt chỉnh của các bài toán (**WEP**) và (**SEP**) và luôn giả sử rằng các bài toán là có nghiệm trong lân cận của các điểm đang xét.

Bổ đề 4.1 (Anh *et al.*, 2009). Cho X, Y là các không gian metric và hàm đa trị $Q: X \rightrightarrows Y$.

(i) Nếu $Q(x_0)$ là tập con compact, thì Q nửa liên tục trên tại x_0 nếu và chỉ nếu với mỗi dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến x_0, và với mỗi dãy $\{y_n\}$, $y_n \in Q(x_n)$, luôn tồn tại dãy con $\{y_{n_k}\}$ của dãy $\{y_n\}$ hội tụ về một phần tử $y \in Q(x_0)$.

(ii) Nếu thêm điều kiện $Q(x_0) = \{y_0\}$ là tập đơn phần tử, thì $\{y_n\}$ hội tụ về y_0.

Định lý 4.1. Giả sử, với $\lambda \in \Lambda$ cho trước, $K(\lambda)$ là tập compact, và với mỗi $y \in K(\lambda), f(.,y,\lambda)$ là C-usc. Khi đó, các tập nghiệm $S^w(\lambda)$ và $S^s(\lambda)$ là compact.

Chứng minh. Do kỹ thuật chứng minh là tương tự nhau, nên ta chỉ trình bày chi tiết cho chứng minh về tính compact của $S^w(\lambda)$. Vì $K(\lambda)$ compact nên ta chỉ cần chứng tỏ $S^w(\lambda)$ là đóng. Lấy dãy $\{x_n\} \subset S^w(\lambda)$, $x_n \to x_0$, ta chứng minh $x_0 \in S^w(\lambda)$. Vì x_n là nghiệm của (WEP$_\lambda$), nên với mọi n, ta có $x_n \in K(\lambda)$ và

$$f(x_n, y, \lambda) \nless_C 0, \forall y \in K(\lambda). \qquad (1)$$

Do $K(\lambda)$ compact, nên $x_0 \in K(\lambda)$. Nếu $x_0 \notin S^w(\lambda)$, tức là tồn tại $y \in K(\lambda)$ sao cho $f(x_0, y, \lambda) <_C 0$, tức là, $f(x_0, y, \lambda) \in -\text{int}C$. Do đó, tồn tại lân cận V của gốc trong Y sao cho $f(x_0, y, \lambda) + V \subset -\text{int}C$. Vì $f(.,y,\lambda)$ là C-usc, và $x_n \to x_0$, nên ta có thể giả sử rằng, $f(x_n, y, \lambda) \in f(x_0, y, \lambda) + V - C$, với n đủ lớn. Vì C là nón lồi, đóng, có đỉnh nên $\text{int}C + C = \text{int}C$, và do đó ta suy ra $f(x_n, y, \lambda) \in -\text{int}C$, điều này mâu thuẫn với (1). Suy ra $S^w(\lambda)$ là tập đóng và do đó cũng là tập compact.

Định lý 4.2. Giả sử, X compact, K liên tục có giá trị compact và f là C-nửa liên tục trên. Khi đó, các ánh xạ nghiệm $\hat{S}^w$ và $\hat{S}^s$ là nửa liên tục trên và có giá trị compact trong $\Lambda \times [0, +\infty)$.

Chứng minh. Ta chứng minh chi tiết cho kết luận trên đối với $\hat{S}^s$, với kỹ thuật tương tự ta cũng thu được kết luận cho trường hợp còn lại. Trước tiên ta chứng minh $S^s(.) = \hat{S}^s(.,0)$ là usc và có giá trị compact trong Λ. Với mỗi $\lambda \in \Lambda$, Định lý 4.1 suy ra tính compact của $S^s(\lambda)$. Ta chứng minh tính nửa liên tục trên của S^s bằng phương pháp phản chứng. Giả sử ngược lại, tồn tại $\lambda \in \Lambda$ sao cho S^s không usc tại λ. Khi đó tồn tại một lân cận mở V của $S^s(\lambda)$ và dãy $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ hội tụ đến λ sao cho, với mỗi n, tồn tại $x_n \in S^s(\lambda_n)\backslash V$. Vì $x_n \in S^s(\lambda_n)$ nên $x_n \in K(\lambda_n)$ và $f(x_n, y, \lambda_n) \geq_C 0, \forall y \in K(\lambda_n)$.

Vì X compact, nên ta có thể giả sử $x_n \to x_0$, với $x_0 \in X$. Do K usc và có giá trị compact nên K đóng, và vì thế $x_0 \in K(\lambda)$. Vì $x_n \notin V$ với mọi n, nên $x_0 \notin S^s(\lambda) \subset V$, tức là tồn tại $y_0 \in K(\lambda)$ sao cho, $f(x_0, y_0, \lambda) \ngeq_C 0$, nghĩa là, $f(x_0, y_0, \lambda) \in Y\backslash C$, là một tập mở. Do đó, tồn tại lân cận B của gốc trong Y sao cho,

$$f(x_0, y_0, \lambda) + B \subset Y\backslash C.$$

Vì f là C-usc, nên tồn tại lân cận U của y_0 và số tự nhiên n_1 sao cho, với mỗi $y \in U$ và $n \geq n_1$,

$$f(x_n, y, \lambda_n) \in f(x_0, y_0, \lambda) + B - C \subset Y\backslash C - C \subset Y\backslash C.$$

Vì $y_0 \in K(\lambda)$, nên $K(\lambda) \cap U \neq \emptyset$. Do K lsc tại λ, nên tồn tại số tự nhiên n_2 sao cho, với mọi $n \geq n_2$, $K(\lambda_n) \cap U \neq \emptyset$.

Đặt $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, khi đó tồn tại $y_{n_0} \in K(n_0) \cap U$ và $f(x_{n_0}, y_{n_0}, \lambda_{n_0}) \in Y\backslash C$, tức là, $f(x_{n_0}, y_{n_0}, \lambda_{n_0}) \ngeq_C 0$, điều này mâu thuẫn với việc $x_{n_0} \in S^s(\lambda_{n_0})$. Do đó, S^s là usc.

Bây giờ ta chứng minh $\hat{S}^s$ là usc và có giá trị compact trong $\Lambda \times [0, +\infty)$. Xét ánh xạ $g: X \times X \times [0, +\infty) \times \Lambda \to Y$ được xác định bởi

$$g(x, y, \varepsilon, \lambda) = f(x, y, \lambda) + \varepsilon e(\lambda).$$

Vì f là C-usc và e liên tục, nên theo Định lý 3.3 ta suy ra g là C-usc. Với lập luận tương tự như trên, với hàm f được thay bằng hàm g, ta suy ra rằng $\hat{S}^s$ là usc và có giá trị compact trong $\Lambda \times [0, +\infty)$.

Bây giờ chúng ta đưa ra mối quan hệ quan trọng giữa sự đặt chỉnh và tính ổn định của các bài toán (**WEP**) và (**SEP**).

Định lý 4.3. Bài toán (**WEP**) và (**SEP**) đặt chỉnh nếu và chỉ nếu với mỗi $\lambda \in \Lambda$, ánh xạ $\hat{S}^w$ và $\hat{S}^s$ tương ứng là nửa liên tục trên và có giá trị compact tại $(\lambda, 0)$.

Chứng minh. Ta trình bày chi tiết của chứng minh cho trường bài toán (**SEP**), bằng việc sử dụng kỹ thuật tương tự với một số thay đổi thích hợp ta sẽ thu được kết luận cho trường hợp còn lại. Giả sử, với mỗi $\lambda \in \Lambda$, $\hat{S}^s$ tương ứng là nửa liên tục trên và có giá trị compact tại $(\lambda, 0)$. Lấy dãy $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ là một dãy tuỳ ý λ và $\{x_n\}$ là dãy xấp xỉ của bài toán (SEP$_\lambda$) tương ứng với $\{\lambda_n\}$. Khi đó, tồn tại dãy $\{\varepsilon_n\} \subset (0, +\infty)$, $\varepsilon_n \to 0$ sao cho, với mỗi n, $x_n \in K(\lambda_n)$ và $f(x_n, y, \lambda_n) + \varepsilon_n e(\lambda_n) \geq_C 0, \forall y \in K(\lambda_n)$, tức là, $x_n \in \hat{S}^s(\lambda_n, \varepsilon_n)$. Vì $\hat{S}^s$ là nửa liên tục trên và có giá trị compact tại $(\lambda, 0)$, nên theo Bổ đề 4.1, ta suy ra tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ và $x_{n_k} \to x_0$, với $x_0 \in S^s(\lambda)$. Vì vậy, bài toán (**SEP**) là đặt chỉnh.

Ngược lại, giả sử (**SEP**) đặt chỉnh. Lấy $\lambda \in \Lambda, \{(\lambda_n, \varepsilon_n)\} \subset \Lambda \times R_+$, với $(\lambda_n, \varepsilon_n) \to (\lambda, 0)$ và $x_n \in \hat{S}^s(\lambda_n, \varepsilon_n)$. Khi đó, với mỗi $n, x_n \in K(\lambda_n)$ và $f(x_n, y, \lambda_n) + \varepsilon_n\, e(\lambda_n) \geq_C 0$, $\forall y \in K(\lambda_n)$, nghĩa là, $\{x_n\}$ là dãy xấp xỉ của (SEP$_\lambda$) tương ứng với dãy $\{\lambda_n\}$. Vì bài toán (**SEP**) đặt chỉnh nên tồn tại dãy con của dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến phần tử trong $S^s(\lambda) = \hat{S}^s(\lambda, 0)$. Áp dụng Bổ đề 4.1, ta suy ra $\hat{S}^s$ là nửa liên tục trên và có giá trị compact tại $(\lambda, 0)$.

Kết hợp các Định lý 4.2 và 4.3 ta có kết quả sau:

Định lý 4.4. Giả sử, X compact, K liên tục có giá trị compact và f là C-nửa liên tục trên. Khi đó, các bài toán (**WEP**) và (**SEP**) là đặt chỉnh.

Chuyển sang sự đặt chỉnh duy nhất, ta cũng thu được kết quả tương tự như trong các Định lý 4.3 và 4.4.

Định lý 4.5. Giả sử, với mỗi $\lambda \in \Lambda$, (WEP_λ) và (SEP_λ) có duy nhất nghiệm. Khi đó, các bài toán (**WEP**) và (**SEP**) là đặt chỉnh duy nhất nếu và chỉ nếu $\hat{S}^w$ và $\hat{S}^s$ tương ứng là nửa liên tục trên và có giá trị compact tại $(\lambda, 0)$.

Định lý 4.6. Giả sử, X compact, K liên tục có giá trị compact và f là C-nửa liên tục trên và giả sử thêm rằng với mỗi $\lambda \in \Lambda$, (WEP_λ) và (SEP_λ) có duy nhất nghiệm. Khi đó, các bài toán (**WEP**) và (**SEP**) là đặt chỉnh duy nhất.

5 KẾT LUẬN

Trong bài báo này chúng ta đã giới thiệu và nghiên cứu các tính chất của lớp các hàm vector nửa liên tục trong không gian được sắp thứ tự theo nón và áp dụng các tính chất thu được vào việc thiết lập các điều kiện đủ cho các dạng đặt chỉnh của các bài toán cân bằng vector trong không gian định chuẩn. Bằng việc điều chỉnh hàm mục tiêu một cách thích hợp, các kết quả chính trong bài báo sẽ suy ra các kết quả tương ứng cho các trường hợp đặc biệt của bài toán cân bằng như đã đề cập đến ở phần mở đầu. Hướng tiếp cận của lớp hàm vector nửa liên tục có thể cho ta nhiều gợi ý cho việc xây dựng lớp hàm vector tựa liên tục trong không gian vector được sắp thứ tự theo nón, và ứng dụng để khảo sát các tính chất nghiệm của các bài toán vector liên quan đến tối ưu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Ait Mansour, M., Riahi, H., 2005. Sensitivity analysis for abstract equilibrium problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 306: 684-691.

Anh, L.Q., Duy T.Q., Kruger, A.Y., Thao, N.H., 2013. Well-posedness for lexicographic vector equilibrium problems. In: Demyanov, V. F., Pardalos, P.M., Batsyn, M. (Eds.). Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics. Springer Optimization and Its Applications. Springer. New York, pp. 159-174.

Anh, L.Q., Khanh, P.Q., 2004. Semicontinuity of the solution set of parametric multivalued vector quasiequilibrium problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 294: 699-711.

Anh, L.Q., Khanh, P.Q., 2006. On the Hölder continuity of solutions to parametric multivalued vector equilibrium problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 321: 308-315.

Anh, L.Q., Khanh, P.Q., 2007. On the stability of the solution sets of general multivalued vector quasiequilibrium problems. Journal of Optimization Theory and Applications. 135: 271-284.

Anh, L.Q., Khanh, P.Q., 2008. Sensitivity analysis for multivalued quasiequilibrium problems in metric spaces. Hölder continuity of solutions. Journal of Global Optimization. 42: 515-531.

Anh, L.Q., Khanh, P.Q., Van, D.T.M., 2012. Well-posedness under relaxed semicontinuity for bilevel equilibrium and optimization problems with equilibrium constraints. Journal of Optimization Theory and Applications.153: 42-59.

Anh, L.Q., Khanh, P.Q., Van, D.T.M., Yao, J.C., 2009. Well-posedness for vector quasiequilibria, Taiwanese Journal of Mathematics. 13: 713-737.

Anh, P.N., Tuan, P.M., Long, L.B., 2013. An interior approximal method for solving pseudomonotone equilibrium problems. Journal of Inequalities and Applications. 2013: 156-172.

Ansari, Q.H., Konnov, I.V., Yao, J.C., 2001. Existence of a solution and variational principles for vector equilibrium problems. Journal of Optimization Theory and Applications. 110: 81-492.

Aubin J.P. and Frankowska, H., 1990. Set-Valued Analysis. Birkhäuser. Boston, 461 pages.

Bianchi, M., Pini, R., 2003. A note on stability for parametric equilibrium problems. Operations Research Letters. 31: 445-450.

Blum, E., Oettli, W., 1994. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. The Mathematics Student. 63: 123-145.

Fu, J.Y., Wan, A.H., 2002. Generalized vector equilibrium problems with set-valued mappings. Mathematical Methods of Operations Research. 56: 259-268.

Göpfert, A., Tammer, C. Riahi, H., Zălinescu, C., 2003. Variational Methods in Partially Ordered Spaces. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 350 pages.

Hadamard, J., 1902. Sur le problèmes aux dérivees partielles et leur signification physique. Princeton University Bulletin. 13: 49-52.

Hu, S., Papageorgiou, N.S., 1997. Handbook of Multivalued Analysis. Kluwer, London, 968 pages.

Iusem, A.N., Sosa, W., 2010. On the proximal point method for equilibrium problems in Hilbert spaces. Optimization. 59: 1259-1274.

Kimura, K., Liou, Y.C., Wu, S.Y., Yao, J.C., 2008. Well-posedness for parametric vector equilibrium problems with applications. Journal of Industrial and Management Optimization. 4: 313-327.

Morgan, J., Scalzo, V., 2006. Discontinuous but well-posed optimization problems. SIAM Journal on Optimization. 17: 861-870.

Muu, L.D., Quy, N.V., 2015. On existence and solution methods for strongly pseudomonotone equilibrium problems. Vietnam Journal of Mathematics. 43: 229-238.

Quoc, T.D., Muu, L.D., Nguyen, V.H., 2008. Extragradient algorithms extended to equilibrium problems. Optimization. 57: 749-776.

Tikhonov, A.N., 1966. On the stability of the functional optimization problem. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 6: 28-33.

Zolezzi,T., 1995. Well-posedness criteria in optimization with applications to the calculus of variations. Nonlinear Analysis. 25: 437-453.

Zolezzi,T., 2001. Well-posedness and optimization under perturbations. Annals of Operations Research. 101: 351-361.