TÍNH LIÊN TỤC CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM BÀI TOÁN TỐI ƯU VECTƠ

Nguyễn Hữu Danh[1*], Lâm Quốc Anh[2] và Phạm Thanh Dược[3]
[1]Trường Đại học Tây Đô
[2]Trường Đại học Cần Thơ
[3]Trường Đại học Kỹ thuật - Công nghệ Cần Thơ
([*]Email: nhdanh@tdu.edu.vn)

Ngày nhận: *01/3/2022*
Ngày phản biện: *22/5/2022*
Ngày duyệt đăng: *20/6/2022*

TÓM TẮT

Mục tiêu nghiên cứu tính liên tục của ánh xạ nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu vectơ bị nhiễu trong không gian định chuẩn. Các khái niệm liên quan đến tính lồi của một ánh xạ có giá trị vectơ như tính $\mathcal{C}$-lồi, $\mathcal{C}$-lồi chặt, tính $\mathcal{C}$-tựa lồi tự nhiên và $\mathcal{C}$-tựa lồi tự nhiên chặt, các khái niệm tổng quát liên quan đến các tính lồi suy rộng của một ánh xạ có giá trị vectơ như tính $\mathcal{C}$-tựa giống lồi tự nhiên và $\mathcal{C}$-tựa giống lồi tự nhiên chặt, được thảo luận. Tiếp theo, dựa trên hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty, chúng tôi giới thiệu một hàm vô hướng phi tuyến mới và thảo luận về các tính chất cơ bản của nó, trong đó tính liên tục đóng một vai trò quan trọng trong nghiên cứu của chúng tôi. Cuối cùng, sử dụng các tính chất của hàm vô hướng phi tuyến này cùng với tính compact của tập ràng buộc và các giả thiết về tính $\mathcal{C}$-liên tục cũng như tính $\mathcal{C}$-tựa giống lồi tự nhiên chặt trên hàm mục tiêu, chúng tôi đã thiết lập các điều kiện đủ cho tính liên tục của ánh xạ nghiệm hữu hiệu của bài toán đã nêu ra.

Từ khóa: *Bài toán tối ưu vectơ, tính giống lồi, nửa liên tục, hàm khoảng cách Hiriart-Urruty, vô hướng hóa phi tuyến*

Trích dẫn: Nguyễn Hữu Danh, Lâm Quốc Anh và Phạm Thanh Dược, 2022. Tính liên tục của ánh xạ nghiệm bài toán tối ưu vectơ. Tạp chí Nghiên cứu khoa học và Phát triển kinh tế Trường Đại học Tây Đô. 16: 298-308.

[*]*Ths. Nguyễn Hữu Danh – Giảng viên Khoa Cơ bản, Trường Đại học Tây Đô*

1. GIỚI THIỆU

Nghiên cứu sự ổn định nghiệm của bài toán tối ưu vectơ là một trong các chủ đề rất được quan tâm trong tối ưu hóa. Huang (2000) đã thiết lập các kết quả ổn định của tập nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu vectơ và đa trị, trong đó dữ liệu của các bài toán xấp xỉ hội tụ về dữ liệu của bài toán gốc theo nghĩa Painlevé-Kuratowski. Sử dụng tính chất trội, Bednarczuk (2004) đã nghiên cứu các tính chất liên tục của ánh xạ nghiệm hữu hiệu bài toán tối ưu vectơ đa mục tiêu chứa tham số. Lucchetti và Miglierina (2004) đã nghiên cứu sự ổn định dưới sự nhiễu của cả hàm mục tiêu và ánh xạ ràng buộc cho bài toán tối ưu vectơ lồi. Crespi và các cộng sự (2009) đã nghiên cứu các tính chất ổn định của các bài toán cực tiểu hóa vectơ bằng cách xét hàm mục tiêu có tính tựa lồi theo nón. Lalitha và Chatterjee (2012) đã thiết lập sự hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski của tập hợp các điểm cực tiểu, cực tiểu yếu và các điểm cực tiểu chính thường Henig của bài toán nhiễu đến tập cực tiểu tương ứng của bài toán gốc với giả thiết hàm mục tiêu có tính tựa lồi chặt theo nón. Han (2016) đã thiết lập các điều kiện đủ cho tính nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới của ánh xạ mức. Sử dụng các tính chất này, tác giả đã thiết lập các điều kiện đủ cho tính nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm hữu hiệu bài toán tối ưu vectơ.

Phương pháp vô hướng hóa là một trong những phương pháp quan trọng trong tối ưu vectơ và tối ưu tập. Phương pháp này đã được sử dụng trong nhiều chủ đề khác nhau như sự tồn tại nghiệm (Gutiérrez and López, 2020), tính ổn định nghiệm (Xu and Li, 2016), sự đặt chỉnh của bài toán (Gupta and Srivastava, 2020), và phương pháp tìm nghiệm (Köbis and Köbis, 2016). Xu và Li (2016) đã giới thiệu một hàm vô hướng phi tuyến tính, là một phiên bản tổng quát của hàm khoảng cách có định hướng. Các tác giả đã nghiên cứu một số tính chất của hàm này như tính đơn điệu, tính lồi, tính nửa liên tục,... Han (2021) đã nghiên cứu tính lồi, tính liên tục và tính liên tục Lipschitz của hàm vô hướng phi tuyến thông qua hàm khoảng cách định hướng.

Từ những quan sát trên, mục tiêu nghiên cứu là khảo sát tính liên tục của ánh xạ nghiệm cho bài toán tối ưu vectơ. Chúng tôi giới thiệu các khái niệm về tính lồi suy rộng của một hàm có giá trị vectơ. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng đề xuất một hàm vô hướng phi tuyến mới dựa trên hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty và nghiên cứu về tính liên tục của nó. Sử dụng các tính chất này, chúng tôi đã thiết lập các điều kiện đủ cho tính liên tục của ánh xạ nghiệm hữu hiệu bài toán tối ưu vectơ.

2. MỞ ĐẦU

Cho $\mathbb{X}, \mathbb{Z}$ là các không gian định chuẩn, $\mathbb{Y}$ là không gian Banach phản xạ, Λ là tập con khác rỗng của $\mathbb{Z}$ và $\mathcal{C}$ là nón lồi, đóng, có đỉnh với phần trong khác rỗng của không gian $\mathbb{Y}$. Cho $\mathcal{P}(\mathbb{Y})$ là tập hợp tất cả các tập con khác rỗng của $\mathbb{Y}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{Y}}$ là quả cầu đơn vị đóng trong $\mathbb{Y}$. $\text{int}\mathcal{A}$ và $\text{bd}\mathcal{A}$ lần lượt là phần trong và biên của tập con $\mathcal{A}$. Với hai phần tử bất kỳ $y_1, y_2 \in \mathbb{Y}$, ta định nghĩa các quan hệ sau đây:

$$y_1 \preccurlyeq y_2 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \in \mathcal{C} \text{ và } y_1 \prec y_2 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \in \text{intC}.$$

Định nghĩa 2.1 Cho $\mathcal{K}$ là một tập hợp lồi trong không gian $\mathbb{X}$, một ánh xạ $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ được gọi là

(a) (Luc, 1989) C-*lồi* trên $\mathcal{K}$, nếu với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{K}$ và $t \in [0,1]$, ta có

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \preccurlyeq (1-t)f(x_1) + tf(x_2);$$

(b) (Luc, 1989) C-*lồi chặt* trên $\mathcal{K}$, nếu với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{K}$ với $x_1 \neq x_2$ và $t \in (0,1)$, ta có

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \prec (1-t)f(x_1) + tf(x_2);$$

(c) C-*lồi nửa chặt* trên $\mathcal{K}$, nếu với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{K}$ với $f(x_1) \neq f(x_2)$ và $t \in (0,1)$, ta có

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \prec (1-t)f(x_1) + tf(x_2);$$

(d) (Han and Huang, 2018) C-*tựa lồi tự nhiên* trên $\mathcal{K}$, nếu với mọi x_1, x_2 trong $\mathcal{K}$ và $t \in [0,1]$, tồn tại $s \in [0,1]$, sao cho

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \preccurlyeq (1-s)f(x_1) + sf(x_2);$$

(e) (Han and Huang, 2018) C-*tựa lồi tự nhiên chặt* trên $\mathcal{K}$, nếu với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{K}$ với $x_1 \neq x_2$ và $t \in (0,1)$, tồn tại $s \in [0,1]$, sao cho

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \prec (1-s)f(x_1) + sf(x_2).$$

Nhận xét 2.2 Rõ ràng, một ánh xạ lồi chặt là một ánh xạ lồi nửa chặt, chiều ngược lại nói chung là không đúng. Ví dụ sau minh họa rằng một hàm lồi nửa chặt có thể không lồi cũng không lồi chặt.

Ví dụ 2.3 Cho hàm số *D* được xác định như sau

$$D(x) = \begin{cases} 1, \textit{nếu } x \textit{ là một số hữu tỉ}, \\ 0, \ \textit{nếu } x \textit{ là một số vô tỉ}. \end{cases}$$

(Hàm *D* còn gọi là hàm Dirichlet). Khi đó, *D* là hàm lồi nửa chặt trên $\mathbb{R}$, nhưng không lồi cũng không lồi chặt trên $\mathbb{R}$.

Tiếp theo, ta giới thiệu thêm các tính lồi suy rộng của một ánh xạ có giá trị vectơ như sau.

Định nghĩa 2.4 Cho một tập con khác rỗng $\mathcal{K}$ của $\mathbb{X}$, một ánh xạ $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ được gọi là

(a) C-*tựa giống lồi tự nhiên* trên $\mathcal{K}$, nếu với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{K}$, tồn tại $x_3 \in \mathcal{K}$ và tồn tại $s \in (0,1)$, sao cho

$$f(x_3) \preccurlyeq (1-s)f(x_1) + sf(x_2);$$

(b) C-*tựa giống lồi tự nhiên chặt* trên $\mathcal{K}$, nếu với hai phần tử khác nhau bất kỳ $x_1, x_2 \in \mathcal{K}$, tồn tại $x_3 \in \mathcal{K}$ và tồn tại $s \in (0,1)$, sao cho

$$f(x_3) \prec (1-s)f(x_1) + sf(x_2).$$

Định nghĩa 2.5 (Luc, 1989) Cho $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ là một ánh xạ có giá trị vectơ và $x_0 \in \mathbb{X}$. Khi đó, f được gọi là

(a) C-*nửa liên tục dưới* (C-lsc) tại x_0, nếu với lân cận $\mathcal{V}$ bất kỳ của $f(x_0)$ trong $\mathbb{Y}$, tồn tại một lân cận $\mathcal{U}$ trong $\mathbb{X}$ của x_0 sao cho $f(x) \in \mathcal{V} + C$ với mọi $x \in \mathcal{U}$;

(b) C-*nửa liên tục trên* (C-usc) tại x_0, nếu với lân cận $\mathcal{V}$ bất kỳ của $f(x_0)$ trong $\mathbb{Y}$, tồn tại một lân cận $\mathcal{U}$ trong $\mathbb{X}$ của x_0 sao cho $f(x) \in \mathcal{V} - C$ với mọi $x \in \mathcal{U}$;

(c) C-*liên tục* tại x_0, nếu nó vừa C-usc vừa C-lsc tại x_0.

Định nghĩa 2.6 (Aubin and Frankowska, 1990) Cho ánh xạ đa trị $F: X \rightrightarrows Y$.

(a) F được gọi là *nửa liên tục trên* (viết tắt là usc) tại x_0 nếu với tập mở U bất kỳ của Y thỏa mãn $F(x_0) \subset U$ thì tồn tại một lân cận N của x_0 sao cho $F(x) \subset U$ với mọi $x \in N$.

(b) F được gọi là *nửa liên tục dưới* (viết tắt là lsc) tại x_0 nếu với tập mở U bất kỳ của Y thỏa mãn $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$ thì tồn tại một lân cận N của x_0 sao cho $F(x) \cap U \neq \emptyset$ với mọi $x \in N$.

(c) Ánh xạ F được gọi là *liên tục* tại x_0 nếu nó vừa là usc vừa là lsc tại x_0.

Ánh xạ F được gọi là usc, lsc hay liên tục trên tập $A \subset X$ nếu nó thỏa mãn các tính chất tương ứng đó tại tất cả các điểm thuộc A. Trong trường hợp $A = \mathrm{dom}F$ thì ta bỏ qua cụm từ "trên A" trong các phát biểu.

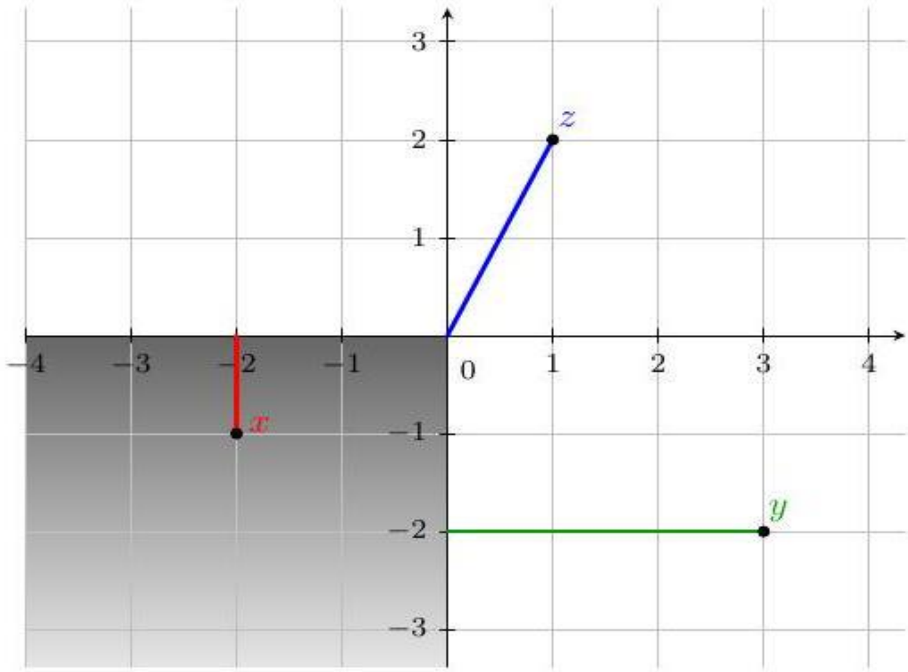
3. HÀM VÔ HƯỚNG HÓA PHI TUYẾN

Trước hết ta nhắc lại hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty được giới thiệu trong Hiriart-Urruty (1979) và các tính chất của nó.

Định nghĩa 3.1 (Hiriart-Urruty, 1979) Cho $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{Y})$ với $\mathcal{A} \neq \mathbb{Y}$. Hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty $\varphi_{\mathcal{A}}: \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ được xác định như sau, với mọi $y \in \mathbb{Y}$,

$$\varphi_{\mathcal{A}}(y) := d(y, \mathcal{A}) - d(y, \mathbb{Y} \setminus \mathcal{A}).$$

Ví dụ 3.2 Cho $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = -\mathbb{R}^2_+$, $x = (-2, -1)$, $y = (3, -2)$, $z = (1,2)$, khi đó $\varphi_{-\mathbb{R}^2_+}(x) = -1$, $\varphi_{-\mathbb{R}^2_+}(y) = 3$ và $\varphi_{-\mathbb{R}^2_+}(z) = \sqrt{5}$.



Hình 1. Minh họa hàm khoảng cách Hiriart-Urruty

Bổ đề 3.3 (Jiménez et al., 2020) Cho y là một phần tử bất kỳ trong $\mathbb{Y}$. Khi đó,

(a) $\varphi_{\mathcal{A}}$ là lồi, nếu $\mathcal{A}$ là lồi.

(b) $\varphi_{\mathcal{A}}(y) < 0 \Leftrightarrow y \in \operatorname{int}\mathcal{A}$.

(c) $\varphi_{\mathcal{A}}(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \operatorname{bd}\mathcal{A}$.

Bổ đề 3.4 (Jiménez et al., 2020) Cho y_1 và y_2 là hai phần tử bất kỳ trong $\mathbb{Y}$. Khi đó,

(a) $y_1 \preccurlyeq y_2$ suy ra $\varphi_{-\mathcal{C}}(y_1) \leq \varphi_{-\mathcal{C}}(y_2)$.

(b) $y_1 \prec y_2$ suy ra $\varphi_{-\mathcal{C}}(y_1) < \varphi_{-\mathcal{C}}(y_2)$.

(c) $\varphi_{-\mathcal{C}}(y_1 + y_2) \leq \varphi_{-\mathcal{C}}(y_1) + \varphi_{-\mathcal{C}}(y_2)$.

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu một số tính chất của hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty.

Bổ đề 3.5 Cho r là một số thực. Khi đó,

(a) $[y \in r\mathcal{B}_{\mathbb{Y}} - \mathcal{C}] \Leftrightarrow [\varphi_{-\mathcal{C}}(y) \leq |r|]$.

(b) $[y \in r\mathcal{B}_{\mathbb{Y}} - \operatorname{int}\mathcal{C}] \Leftrightarrow [\varphi_{-\mathcal{C}}(y) < |r|]$.

Chứng minh. Vì kỹ thuật chứng minh giống nhau, ta chỉ trình bày chứng minh cho khẳng định (a). Cho y là một phần tử bất kỳ trong $\mathbb{Y}$. Với bất kỳ $y \in r\mathcal{B}_{\mathbb{Y}} - \mathcal{C}$, ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1. Nếu $y \in (-\mathcal{C})$, thì $\varphi_{-\mathcal{C}}(y) = -d(y, \mathbb{Y} \setminus (-\mathcal{C})) \leq 0 \leq |r|$.

Trường hợp 2. Nếu $y \notin (-\mathcal{C})$, thì $\varphi_{-\mathcal{C}}(y) = d(y, -\mathcal{C}) \leq |r|$ vì $y \in r\mathcal{B}_{\mathbb{Y}} - \mathcal{C}$, và do đó $\varphi_{-\mathcal{C}}(y) \leq |r|$.

Ngược lại, giả sử $\varphi_{-\mathcal{C}}(y) \leq 0$, theo Bổ đề 3.3 (b) và (c), ta có $y \in (-\mathcal{C}) \subset r\mathcal{B}_{\mathbb{Y}} - \mathcal{C}$ với mọi $r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Nếu $0 < \varphi_{-\mathcal{C}}(y) \leq |r|$, thì

$$\varphi_{-\mathcal{C}}(y) = d(y, -\mathcal{C}) = \inf_{c \in \mathcal{C}} \| y + c \| \leq |r|.$$

Theo Mệnh đề 2.3 trong Borwein và Fitzpatrick (1989), ta có $c' \in \mathcal{C}, \|y + c'\| \leq |r|$, và do đó $y \in r\mathcal{B}_{\mathbb{Y}} - \mathcal{C}$. Ta được điều phải chứng minh.

Cho $f: \mathbb{X} \times \Lambda \to \mathbb{Y}$ là một ánh xạ có giá trị vectơ, ta xét hàm số $\xi: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \Lambda \to \mathbb{R}$, được xác định như sau, với mọi $x, z \in \mathbb{X}, p \in \Lambda$

$$\xi(z, x, p) := \varphi_{-\mathcal{C}}\big(f(z, p) - f(x, p)\big).$$

Phần còn lại của mục này, ta sẽ nghiên cứu các tính chất liên tục của hàm ξ, các tính chất này đóng một vai trò quan trọng trong phần tiếp theo.

Bổ đề 3.6 Cho $f: \mathbb{X} \times \Lambda \to \mathbb{Y}$ là một ánh xạ có giá trị vectơ và $\mathcal{K}$ là một tập con khác rỗng của $\mathbb{X}$. Khi đó,

(a) ξ là nửa liên tục dưới theo biến thứ nhất và nửa liên tục trên theo biến thứ hai trên $\mathcal{K}$, nếu f là $\mathcal{C}$-nửa liên tục dưới theo biến thứ nhất trên $\mathcal{K}$.

(b) ξ là nửa liên tục trên theo biến thứ nhất và nửa liên tục dưới theo biến thứ hai trên $\mathcal{K}$, nếu f là $\mathcal{C}$-nửa liên tục trên theo biến thứ nhất trên $\mathcal{K}$.

(c) ξ là liên tục theo biến thứ nhất và biến thứ hai trên $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, nếu f là $\mathcal{C}$-liên tục theo biến thứ nhất trên $\mathcal{K}$.

Chứng minh. Vì kỹ thuật chứng minh tương tự nên trong khẳng định (a) và (b), ta chỉ chứng minh cho tính nửa liên tục của ξ theo biến thứ nhất trên $\mathcal{K}$. Lấy $a \in \mathbb{X}$ và $p \in \Lambda$.

Với khẳng định (a), ta chứng minh rằng $L^a_{\leq r}\xi := \{x \in \mathcal{K} \mid \xi(x,a,p) \leq r\}$ là một tập đóng với bất kỳ $r \in \mathbb{R}$, nghĩa là với bất kỳ dãy $\{x_n\} \subset L^a_{\leq r}\xi, x_n$ hội tụ về $\bar{x}$ suy ra $\bar{x} \in L^a_{\leq r}\xi$. Giả sử ngược lại, nghĩa là, tồn tại $\bar{r} \in \mathbb{R}, \{\bar{x}_n\} \subset L^a_{\leq \bar{r}}\xi$ và $\bar{x} \in \mathbb{X}$ sao cho $\bar{x}_n$ hội tụ về $\bar{x}$ và $\bar{x} \notin L^a_{\leq \bar{r}}\xi$. Khi đó, tồn tại $\varepsilon \geq 0$ và $\varsigma > 0$ sao cho

$$\begin{aligned}\varphi_{-\mathcal{C}}(f(\bar{x}_n,p) - f(a,p)) &= \xi(\bar{x}_n,a,p) \\ &\leq \bar{r} < \bar{r} + \varepsilon < \bar{r} + \varepsilon + \varsigma \\ &< \xi(\bar{x},a,p) \\ &= \varphi_{-\mathcal{C}}(f(\bar{x},p) - f(a,p)).\end{aligned}$$

Kết hợp điều này với Bổ đề 3.5 ta được

$$\begin{aligned}f(a,p) \in f(\bar{x}_n,p) + (\bar{r} + \varepsilon)\mathcal{B}_{\mathbb{Y}} &+ \operatorname{int}\mathcal{C} \text{ và } f(a,p) \\ &\notin f(\bar{x},p) + (\bar{r} + \varepsilon + \varsigma)\mathcal{B}_{\mathbb{Y}} \\ &+ \mathcal{C}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}, f(\bar{x}_{n_0},p) \in f(\bar{x},p) + \varsigma\mathcal{B}_{\mathbb{Y}} + \operatorname{int}\mathcal{C}$, thì $f(a,p) \in f(\bar{x},p) + (\bar{r} + \varepsilon + \varsigma)\mathcal{B}_{\mathbb{Y}} + \operatorname{int}\mathcal{C}$, điều này mâu thuẩn với (1). Vì vậy, ta được $f(\bar{x}_n,p) \notin f(\bar{x},p) + \varsigma\mathcal{B}_{\mathbb{Y}} + \operatorname{int}\mathcal{C}$ với mọi n, nghĩa là,

$$f(\bar{x}_n,p) \notin f(\bar{x},p) + \varsigma\mathcal{B}_{\mathbb{Y}} + \operatorname{int}\mathcal{C} + \mathcal{C}. \qquad (2)$$

Rõ ràng $\mathcal{V} := f(\bar{x},p) + \varsigma\mathcal{B}_{\mathbb{Y}} + \operatorname{int}\mathcal{C}$ là một lân cận của $f(\bar{x},p)$ trong $\mathbb{Y}$, do tính $\mathcal{C}$-nửa liên tục dưới của f, tồn tại một lân cận $\mathcal{U}$ của $\bar{x}$ trong $\mathbb{X}$, với mọi $x \in \mathcal{U}$,

$$f(x,p) \in f(\bar{x},p) + \varsigma\mathcal{B}_{\mathbb{Y}} + \operatorname{int}\mathcal{C} + \mathcal{C}. \qquad (3)$$

Vì $\bar{x}_n$ hội tụ về $\bar{x}$, tồn tại $n_k \in \mathbb{N}$ sao cho $\bar{x}_n \in \mathcal{U}$ với mọi $n > n_k$. Khi đó, x_n thỏa mãn cả (2) và (3), đây là điều mâu thuẩn. Do đó, $L^a_{\leq r}\xi$ là tập đóng, và do đó ξ là nửa liên tục dưới theo biến thứ nhất trên $\mathcal{K}$.

Với khẳng định (b), ta chứng minh rằng $L^a_{\geq r}\xi := \{x \in \mathcal{K} \mid \xi(x,a,p) \geq r\}$ là một tập đóng với bất kỳ $r \in \mathbb{R}$, nghĩa là với bất kỳ dãy $\{x_n\} \subset L^a_{\geq r}\xi, x_n \to \bar{x}$ suy ra $\bar{x} \in L^a_{\geq r}\xi$. Giả sử ngược lại, nghĩa là, tồn tại $\bar{r} \in \mathbb{R}, \{\bar{x}_n\} \subset L^a_{\geq \bar{r}}\xi$ và $\bar{x} \in \mathcal{K}$ sao cho $\bar{x}_n \to \bar{x}$ và $\bar{x} \notin L^a_{\geq}\xi$. Vì $\bar{x} \notin L^a_{\geq \bar{r}}\xi$, tồn tại $\varepsilon > 0$ và $\varsigma > 0$ sao cho $\xi(\bar{x},a,p) < \bar{r} - \varepsilon < \bar{r} - \varepsilon + \varsigma < \bar{r} \leq \xi(\bar{x}_n,a,p)$. Khi đó, Bổ đề 3.5 cho ta

$$\begin{aligned}f(a,p) \in f(\bar{x},p) + (\bar{r} - \varepsilon)\mathcal{B}_{\mathbb{Y}} &\\ + \operatorname{int}\mathcal{C} &\text{ và } f(a,p) \\ \notin f(\bar{x}_n,p) &+ (\bar{r} - \varepsilon \\ + \varsigma)\mathcal{B}_{\mathbb{Y}} &+ \mathcal{C}.\end{aligned}$$

Sử dụng lập luận tương tự như trong chứng minh khẳng định (a), ta được $f(\bar{x},p) \notin f(\bar{x}_n,p) + \varsigma\mathcal{B}_{\mathbb{Y}} + \mathcal{C}$, và do đó $f(\bar{x}_n,p) \notin f(\bar{x},p) + \varsigma\mathcal{B}_{\mathbb{Y}} - \mathcal{C}$, điều này mâu thuẫn với tính $\mathcal{C}$-nửa liên tục trên của f tại $\bar{x}$. Vì vậy, $L^a_{\geq r}\xi$ là một tập đóng, suy ra ξ là nửa liên tục trên theo biến thứ nhất trên $\mathcal{K}$.

Với khẳng định (c), lấy tùy ý $(x_0,y_0) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$, theo (a) và (b) trong bổ đề này, với mọi $\varepsilon > 0, (x_n,y_n) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ hội tụ về (x_0,y_0), tồn tại n_0, với mọi $n > n_0$,

$$|\xi(x_n,x_0,p) - \xi(x_0,x_0,p)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ và } |\xi(y_0,y_n,p) - \xi(y_0,y_0,p)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (4)$$

$$|\xi(x_0,x_n,p)-\xi(x_0,x_0,p)|\le\frac{\varepsilon}{2} \text{ và } |\xi(y_n,y_0,p)-\xi(y_0,y_0,p)|\le\frac{\varepsilon}{2}, \quad (5)$$

với mọi $(x_n,y_n)\in\mathcal{U}\times\mathcal{V}$. Theo định nghĩa của ξ và Bổ đề 3.4 (c), ta có

$$\begin{aligned}\xi(x_n,y_n,p)&=\varphi_{-\mathcal{C}}\big(f(x_n,p)-f(y_n,p)\big)\\&\le\varphi_{-\mathcal{C}}\big(f(x_n,p)-f(x_0,p)\big)+\varphi_{-\mathcal{C}}\big(f(x_0,p)-f(y_0,p)\big)\\&\quad+\varphi_{-\mathcal{C}}\big(f(y_0,p)-f(y_n,p)\big)\\&\le\xi(x_n,x_0,p)+\xi(x_0,y_0,p)+\xi(y_0,y_n,p).\end{aligned}$$

Tương tự, ta có $\xi(x_0,y_0,p)\le\xi(x_0,x_n,p)+\xi(x_n,y_n,p)+\xi(y_n,y_0,p)$. Khi đó,

$$|\xi(x_n,y_n,p)-\xi(x_0,y_0,p)|\le\max\{|\xi(x_n,x_0,p)+\xi(y_0,y_n,p)|,|\xi(x_0,x_n,p)+\xi(y_n,y_0,p)|\}. \quad (6)$$

Kết hợp $(4)-(6)$, $\xi(x,x,p)=0$ với mọi $x\in\mathcal{K}$, ta chỉ cần xét hai trường hợp.

Trường hợp 1. $\max\{|\xi(x_n,x_0,p)+\xi(y_0,y_n,p)|,|\xi(x_0,x_n,p)+\xi(y_n,y_0,p)|\}$

$$=|\xi(x_n,x_0,p)+\xi(y_0,y_n,p)|.$$

Theo kết quả của khẳng định (a) và (b) của bổ đề này, ta có

$$\begin{aligned}|\xi(x_n,y_n,p)-\xi(x_0,y_0,p)|&\le|\xi(x_n,x_0,p)+\xi(y_0,y_n,p)|\\&\le|\xi(x_n,x_0,p)-\xi(x_0,x_0,p)|\\&\quad+|\xi(y_0,y_n,p)-\xi(y_0,y_0,p)|\le\varepsilon\end{aligned}$$

Trường hợp 2. $\max\{|\xi(x_n,x_0,p)+\xi(y_0,y_n,p)|,|\xi(x_0,x_n,p)+\xi(y_n,y_0,p)|\}$

$$=|\xi(x_0,x_n,p)+\xi(y_n,y_0,p)|.$$

Bằng lập luận tương tự, ta cũng có $|\xi(x_n,y_n,p)-\xi(x_0,y_0,p)|\le\varepsilon$. Vậy, ta kết luận ξ liên tục tại mọi điểm $(x_0,y_0)\in\mathcal{K}\times\mathcal{K}$, nghĩa là ξ liên tục trên $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$. □

Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có kết quả sau.

Bổ đề 3.7 Cho $f:\mathbb{X}\times\Lambda\to\mathbb{Y}$ là một ánh xạ có giá trị vectơ và $\mathcal{K}$ là một tập con khác rỗng của $\mathbb{X}$. Khi đó, ξ là liên tục theo biến thứ ba trên Λ, nếu f là $\mathcal{C}$-liên tục theo biến thứ hai trên Λ.

4. TÍNH NỬA LIÊN TỤC CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM BÀI TOÁN TỐI ƯU VECTƠ

Mục đích của phần này là nghiên cứu các tính nửa liên tục của ánh xạ nghiệm hữu hiệu cho bài toán tối ưu vectơ. Với mỗi phần tử $p\in\Lambda$, ta xét bài toán tối ưu vectơ như sau:

(VOP)

$$\min f(x,p) \text{ với } x\in\mathcal{K}$$

trong đó $\mathbb{X},\mathbb{Y},\Lambda$ như trong Mục 2, $f:\mathbb{X}\times\Lambda\to\mathbb{Y}$ là một hàm có giá trị vectơ và $\mathcal{K}$ là một tập con khác rỗng của $\mathbb{X}$.

Định nghĩa 4.1 Cho $p\in\Lambda$ và $x_0\in\mathcal{K}$. Ta nói rằng x_0 là một nghiệm hữu hiệu của (VOP) nếu với mọi $x\in\mathcal{K}$, $f(x,p)-f(x_0,p)\notin-\mathcal{C}\setminus\{0\}$.

Ta kí hiệu tập nghiệm hữu hiệu của (VOP) là $\mathrm{Eff}(f,\mathcal{K})$. Với mỗi $v \in \mathcal{K}$, $p \in \Lambda$, ta đặt

$$S_v(p) := \{z \in \mathcal{K} \mid \text{với mọi } x \in \mathcal{K}, \xi(x,v,p) \geq \xi(z,v,p)\}.$$

Định lí 4.2 Cho $\mathcal{K}$ là một tập con compact của $\mathbb{X}$, $v \in \mathcal{K}$ và $p_0 \in \Lambda$. Giả sử rằng f là $\mathcal{C}$-liên tục trên $\mathcal{K} \times \Lambda$. Khi đó, $\mathrm{Eff}(f,\mathcal{K})$ là nửa liên tục trên tại p_0.

Chứng minh. Giả sử $\mathrm{Eff}(f,\mathcal{K})$ không nửa liên tục trên tại p_0, nghĩa là tồn tại một lân cận U của $\mathrm{Eff}(f,\mathcal{K})$, một dãy $\{p_n\}$ hội tụ về p_0 và $x_n \in \mathrm{Eff}(f,\mathcal{K})$ sao cho $x_n \notin U$ với mọi n. Do $\mathcal{K}$ là tập compact nên ta có thể giả sử x_n hội tụ về x_0 nào đó thuộc $\mathcal{K}$. Nếu $x_0 \notin \mathrm{Eff}(f,\mathcal{K})$ thì tồn tại $y \in \mathcal{K}$ sao cho $f(y,p_0) - f(x_0,p_0) \in -\mathcal{C} \setminus \{0\}$. Vì $x_n \in \mathrm{Eff}(f,\mathcal{K})$, nên ta có $f(y,p_n) - f(x_n,p_n) \notin -\mathcal{C} \setminus \{0\}$, với mọi $y \in \mathcal{K}$. Từ tính liên tục của f, ta có $f(y,p_0) - f(x_0,p_0) \notin -\mathcal{C} \setminus \{0\}$. Điều này vô lý vì $f(y,p_0) - f(x_0,p_0) \in -\mathcal{C} \setminus \{0\}$. Do đó $x_0 \in \mathrm{Eff}(f,\mathcal{K}) \subset U$, đây lại là một mâu thuẩn vì $x_n \notin U$ với mọi n. Vậy $\mathrm{Eff}(f,\mathcal{K})$ là nửa liên tục trên tại p_0.

Bổ đề 4.3 Cho $\mathcal{K}$ là một tập con compact của $\mathbb{X}$ và $p \in \Lambda$. Giả sử $f(\cdot,p)$ là $\mathcal{C}$-tựa giống lồi tự nhiên chặt và $\mathcal{C}$-liên tục trên $\mathcal{K}$. Khi đó, $\mathrm{Eff}(f,\mathcal{K}) = \cup_{v\in\mathcal{K}} S_v(p)$.

Chứng minh. Với mọi $v \in \mathcal{K}$ và $p \in \Lambda$, ta chứng minh rằng $S_v(p)$ là tập đơn phần tử với bất kỳ $v \in \mathcal{K}$.

Vì f là $\mathcal{C}$-liên tục, Bổ đề 3.6(c) suy ra ξ là liên tục, do đó hàm $\xi(\cdot,v,p)$ đạt được giá trị nhỏ nhất trên cả tập con compact $\mathcal{K}$ của $\mathbb{X}$, nghĩa là $S_v(p)$ là tập khác rỗng. Giả sử tồn tại hai phần tử khác nhau z_1, z_2 trong $S_v(p)$, do tính $\mathcal{C}$-tựa giống lồi tự nhiên chặt của f, tồn tại $\hat{x} \in \mathcal{K}$ và $\mu \in [0,1]$, $f(\hat{x},p) \in (1-\mu)f(z_1,p) + \mu f(z_2,p) - \mathrm{int}\mathcal{C}$. Suy ra, $f(\hat{x},p) - f(v,p) \in (1-\mu)[f(z_1,p) - f(v,p)] + \mu[f(z_2,p) - f(v,p)] - \mathrm{int}\mathcal{C}$. Kết hợp điều này với các Bổ đề 3.3(a) và 3.4(b) ta được

$$\begin{aligned}
\xi(\hat{x},v,p) &< \varphi_{-\mathcal{C}}((1-\mu)[f(z_1,p) - f(v,p)] \\
&\qquad + \mu[f(z_2,p) - f(v,p)]) \\
&\leq (1-\mu)\varphi_{-\mathcal{C}}\big(f(z_1,p) - f(v,p)\big) \\
&\qquad + \mu\varphi_{-\mathcal{C}}(f(z_2,p) - f(v,p)) \\
&= (1-\mu)\xi(z_1,v,p) + \mu\xi(z_2,v,p) \\
&= \xi(z_1,v,p) \text{ vì } z_1, z_2 \in S_v(p)
\end{aligned}$$

điều này mâu thuẩn với $z_1 \in S_v(p)$, do vậy $S_v(p)$ là tập đơn phần tử với mọi $v \in \mathcal{K}$.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng $\mathrm{Eff}(f,\mathcal{K}) = \cup_{v\in\mathcal{K}} S_v(p)$.

($\subset$) Lấy $\bar{x} \in \mathrm{Eff}(f,\mathcal{K})$ tùy ý, khi đó với $x \in \mathcal{K}, f(x,p) - f(\bar{x},p) \notin -\mathcal{C} \setminus \{0\}$, suy ra $f(x,p) - f(\bar{x},p) \notin -\mathrm{int}C$. Kết hợp điều này với Bổ đề 3.3(b) ta được $\xi(x,\bar{x},p) \geq 0 = \xi(\bar{x},\bar{x},p)$ với mọi $x \in \mathcal{K}$, do vậy $\bar{x} \in S_{\bar{x}}(p)$.

($\supset$) Lấy bất kỳ $\bar{x} \in \cup_{v\in\mathcal{K}} S_v(p)$, tồn tại $v_0 \in \mathcal{K}$ sao cho $\bar{x} \in S_{v_0}(p)$. Do tính đơn phần tử của $S_{v_0}(p)$, nên $\xi(x,a_0,p) > \xi(\bar{x},a_0,p)$ với mọi $x \in \mathcal{K} \setminus \{\bar{x}\}$. Giả sử ngược lại $\bar{x} \notin \mathrm{Eff}(f,\mathcal{K})$, khi đó ta có thể lấy một vectơ $\hat{x} \in \mathcal{K}$, sao cho $f(\hat{x},p) - f(\bar{x},p) \in -\mathcal{C} \setminus \{0\} \subset -\mathcal{C}$. Suy ra $f(\hat{x},p) - f(v_0,p) \preccurlyeq f(\bar{x},p) - f(v_0,p)$, và do đó Bổ đề 3.4 cho ta $\xi(\hat{x},v_0,p) \leq$

$\xi(\bar{x}, v_0, p)$, đây là điều mâu thuẩn. Vậy, $\bar{x} \in \mathrm{Eff}(f, \mathcal{K})$.

Định lí 4.4 Cho $\mathcal{K}$ là một tập con compact của $\mathbb{X}$, $v \in \mathcal{K}$ và $p \in \Lambda$. Giả sử rằng

(i) f là $\mathcal{C}$-tựa giống lồi tự nhiên chặt và $\mathcal{C}$-liên tục theo biến thứ nhất trên $\mathcal{K}$;

(ii) f là $\mathcal{C}$-liên tục theo biến thứ hai trên Λ.

Khi đó, ánh xạ có giá trị vectơ $S_v(p): \mathcal{K} \times \Lambda \to \mathcal{K}$ là nửa liên tục dưới trên Λ và do đó tập nghiệm hữu hiệu $\mathrm{Eff}(f, \mathcal{K})$ nửa liên tục dưới trên Λ.

Chứng minh. Nếu tồn tại $p_0 \in \Lambda$, mà $S_v(\cdot)$ không nửa liên tục dưới tại p_0, thì tồn tại một lân cận mở $\mathcal{V}$ của $S_v(p_0)$ và một dãy $\{p_n\}$ hội tụ về p_0 sao cho $S_v(p_n)$ không thuộc vào $\mathcal{V} + \mathcal{C}$ với mọi n. Xét $\{z_n\} \subset \mathcal{K}$ được xác định bởi $z_n := S_v(p_n)$ với mọi n. Vì tính compact của $\mathcal{K}$, ta có thể giả sử $\{z_n\}$ hội tụ về $z_0 \in \mathcal{K}$. Từ $z_n = S_v(p_n)$ suy ra $\xi(x, v, p_n) \geq \xi(z_n, v, p_n)$ với mọi $x \in \mathcal{K}$, kết hợp điều này với giả thiết (ii) và Bổ đề 3.6, 3.7 suy ra $\xi(x, v, p_0) \geq \xi(z_0, v, p_0)$. Tương đương, $z_0 = S_v(p_0) \in \mathcal{V} + \mathcal{C}$, vì $S_v(p_0)$ là tập đơn phần tử, điều này là không thể vì $\{z_n\}$ hội tụ về z_0 và $z_n \notin \mathcal{V} + \mathcal{C}$ với mọi n. Vậy, $S_v(\cdot)$ là nửa liên tục dưới tại mọi điểm $p \in \Lambda$. Theo nhận xét 2.44 của Hu và Papageorgiou (1997), $\cup_{v \in \mathcal{K}} S_v(p)$ là nửa liên tục dưới tại mọi điểm $p \in \Lambda$, nghĩa là $\mathrm{Eff}(f, \mathcal{K})$ là nửa liên tục dưới trên Λ.

Kết hợp Định lí 4.2 và Định lí 4.4, ta có kết quả sau.

Định lí 4.5 Cho $\mathcal{K}$ là một tập con compact của $\mathbb{X}$, $v \in \mathcal{K}$ và $p \in \Lambda$. Giả sử rằng

(i) f là $\mathcal{C}$-tựa giống lồi tự nhiên chặt theo biến thứ nhất trên $\mathcal{K}$;

(ii) f là $\mathcal{C}$-liên tục trên $\mathcal{K} \times \Lambda$.

Khi đó, $\mathrm{Eff}(f, \mathcal{K})$ là liên tục trên Λ.

5. KẾT LUẬN

Bằng cách sử dụng các giả thiết về tính lồi suy rộng và tính liên tục theo nón của ánh xạ có giá trị vectơ, kết hợp với các tính chất của hàm vô hướng hóa phi tuyến, chúng tôi đã thiết lập các điều kiện đủ cho tính liên tục của ánh xạ nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu vectơ phụ thuộc tham số. Cách tiếp cận của chúng tôi khác với các kết quả đã có. Hơn nữa, cách tiếp cận này có thể áp dụng cho các bài toán quan trọng khác trong tối ưu như các bài toán tối ưu tập, bài toán bao hàm thức biến phân,…

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Aubin, J. P., Frankowska, H., 1990. Set-Valued Analysis. Birkhäuser Boston Inc., Boston.

2. Bednarczuk, E. M., 2004. Continuity of minimal points with applications to parametric multiple objective optimization. European Journal of Operational Research.157:59–67.

3. Borwein, J. M., Fitzpatrick, S., 1989. Existence of nearest points in Banach spaces. Canadian Journal of Mathematics. 41(4): 702–720.

4. Crespi, G. P., Papalia, M., Rocca, M., 2009. Extended well-posedness of quasiconvex vector optimization problems. Journal of Optimization Theory and Applications. 141:285–297.

5. Gupta, M., Srivastava, M., 2020. Approximate Solutions and Levitin–Polyak Well-Posedness for Set Optimization Using Weak Efficiency. Journal of Optimization Theory and Applications. 186: 191–208.

6. Gutiérrez, C., López, R., 2020. On the Existence of Weak Efficient Solutions of Nonconvex Vector Optimization Problems. Journal of Optimization Theory and Applications. 185: 880–902.

7. Han, Y., Gong, X., 2016. Continuity of the efficient solution mapping for vector optimization problems. Optimization. 65(7): 1337–1347.

8. Han, Y., Huang, N. J., 2018. Existence and connectedness of solutions for generalized vector quasi-equilibrium problems. Journal of Optimization Theory and Applications. 179(1): 65–85.

9. Han, Y., 2021. Some characterizations of a nonlinear scalarizing function via oriented distance function. Optimization: 1–33.

10. Hiriart-Urruty, J. B., 1979. Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in banach spaces. Mathematics of Operations Research. 4(1): 79–97.

11. Hu, S., Papageorgiou, N., 1997. Handbook of Multivalued Analysis, Volume I: Theory. Kluwer, Boston.

12. Huang, X. X., 2000. Stability in vector-valued and set-valued optimization. Mathematical Methods of Operations Research.52:185–193.

13. Jiménez, B., Novo, V., Vílchez, A., 2020. Characterization of set relations through extensions of the oriented distance. Mathematical Methods of Operations Research. 91(1):89–115.

14. Köbis, E., Köbis, M. A., 2016. Treatment of set order relations by means of a nonlinear scalarization functional: a full characterization. Optimization. 65: 1805–1827.

15. Lalitha, C. S., Chatterjee, P., 2012. Stability and scalarization of weak efficient, efficient and Henig proper efficient sets using generalized quasiconvexities. Journal of Optimization Theory and Applications. 155:941–961.

16. Luc, D. T., 1989. Theory of vector optimization. Springer.

17. Lucchetti, R. E., Miglierina, E., 2004. Stability for convex vector optimization. Optimization.53:517–528.

18. Xu, Y. D., Li, S. J., 2016. A new nonlinear scalarization function and applications. Optimization. 65:207–231.

CONTINUITY OF THE SOLUTION MAPS TO VECTOR OPTIMIZATION PROBLEMS

Nguyen Huu Danh[1*], Lam Quoc Anh[2] and Pham Thanh Duoc[3]
[1]Tay Do University, [2]Can Tho University, [3]Can Tho University of Technology
([*]Email: nhdanh@tdu.edu.vn)

ABSTRACT

The objective was to study the continuity of the efficient solution maps of perturbed vector optimization problems in normed spaces. The concepts related to the convexity of a vector-valued map such as $\mathcal{C}$-convexity, strictly $\mathcal{C}$-convexity, naturally quasi $\mathcal{C}$-convexity, and strictly naturally quasi $\mathcal{C}$-convexity were reviewed. Then, we proposed generalized concepts related to the generalized convexity of a vector-valued map such as naturally quasi $\mathcal{C}$-convexlikeness and strictly naturally quasi $\mathcal{C}$-convexlikeness. Based on the Hiriart-Urruty-oriented distance function, we introduced a new nonlinear scalarization function and discussed its basic properties, in which continuity played an important role in our analysis. Finally, employing properties of the nonlinear scalarization function with the compactness of constraining set and the $\mathcal{C}$-continuity as well as strictly naturally quasi $\mathcal{C}$-convexlikeness assumptions on the objective map, we established sufficient conditions for continuity of the efficient solution maps to problems.

Keywords: *Convexlikeness, Hiriart-Urruty oriented distance function, nonlinear scalarization, semicontinuity, vector optimization problems*