

DOI:10.22144/ctu.jvn.2021.108

PHÂN TÍCH TẦN SỐ DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA HỆ THANH KHÔNG GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỘ CỨNG ĐỘNG LỰC

Lê Tuấn Tú^{1*}, Đỗ Kiến Quốc² và Trần Thị Phụng¹

¹Khoa Công nghệ, Trường Đại học Cần Thơ

²Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Trường Đại học Bách Khoa Thành phố Hồ Chí Minh

*Người chịu trách nhiệm về bài viết: Lê Tuấn Tú (email: lttu@ctu.edu.vn)

Thông tin chung:

Ngày nhận bài: 24/02/2021

Ngày nhận bài sửa: 03/04/2021

Ngày duyệt đăng: 20/08/2021

Title:

An analysis of the natural frequencies of space frames using dynamic stiffness method

Từ khóa:

Dao động, khung không gian, ma trận độ cứng động lực, tần số dao động riêng

Keywords:

Dynamic stiffness matrix, natural frequencies, space frame, vibration

ABSTRACT

The main purpose of this study is to analyze the natural frequencies of space frames using dynamic stiffness matrix method. The paper is going to present how to establish the dynamic stiffness matrix of the linear frame element bearing axial, torsion and bending in two planes on the basis of inertia to find the exact root of the dynamic balance equation using Euler - Bernoulli beam theory. Then, the matrix above was employed to establish the dynamic stiffness matrix of space frame elements and applied to analysis the natural frequencies of space frames. Comparing the analysis results of the dynamic stiffness method with those of the finite element method showed the accuracy of the dynamic stiffness method. The dynamic stiffness method gave accurate results as soon as the frame was viewed as a single element while the finite element method failed to perform the similar task.

TÓM TẮT

Mục tiêu của nghiên cứu là phân tích tần số dao động riêng của hệ thanh không gian bằng phương pháp độ cứng động lực. Nghiên cứu trình bày cách xây dựng các ma trận độ cứng động lực của phần tử thanh thẳng chịu lực dọc trục, chịu xoắn và chịu uốn trên cơ sở tìm nghiệm chính xác của phương trình cân bằng động học theo lý thuyết dầm Euler - Bernoulli. Từ đó, các ma trận trên được sử dụng để xây dựng ma trận độ cứng động lực cho phần tử thanh chịu lực tổng quát và ứng dụng nó vào việc phân tích tần số dao động riêng của hệ thanh không gian. So sánh các kết quả tính toán của phương pháp độ cứng động lực với các kết quả của phương pháp phần tử hữu hạn cho thấy độ chính xác của phương pháp độ cứng động lực. Phương pháp độ cứng động lực cho kết quả phân tích chính xác ngay khi xem thanh là một phần tử duy nhất - điều mà phương pháp phần tử hữu hạn không làm được.

1. GIỚI THIỆU

Trong thực tế, phương pháp phần tử hữu hạn (Finite Element Method - FEM) thường được sử dụng để xác định các tần số dao động riêng và dạng dao động riêng của kết cấu. Tuy nhiên, FEM lại sử

dụng hàm dạng là trường chuyển vị tĩnh để xấp xỉ chuyển vị của kết cấu, bỏ qua yếu tố động lực khi mô tả ứng xử của kết cấu trong các bài toán động lực học tổng quát. Đây là một nhược điểm của FEM trong phân tích bài toán động lực học khi cần phải

rời rạc kết cấu thành nhiều phần tử nhỏ để đạt độ chính xác mong muốn.

Xuất phát từ các vấn đề vừa nêu, phương pháp độ cứng động lực (Dynamic Stiffness Method – DSM) ra đời với ý tưởng chủ đạo là sử dụng hàm dạng của phần tử hữu hạn là trường chuyển vị đồng thoả mãn phương trình cân bằng động. Khi đó các hàm dạng là các hàm số phụ thuộc vào tần số của tải trọng tác động, do đó ta có thể tìm được chính xác tần số dao động riêng của kết cấu. Banerjee (2003) đã sử dụng phương pháp này để nghiên cứu về dao động tự do của dầm sandwich, Đỗ Huỳnh Phước (2008) sử dụng phương pháp DSM để phân tích tần số dao động riêng của các hệ thanh phẳng. Bài báo này trình bày việc áp dụng phương pháp DSM vào việc xác định tần số dao động riêng của hệ thanh không gian.

Ma trận độ cứng động lực trong hệ tọa độ địa phương trong trường hợp không cần có dạng (Trần Văn Liên, 2005):

$$D(\omega) = K(\omega) - \omega^2 M(\omega) \quad (1)$$

Trong đó, $K(\omega)$ và $M(\omega)$ lần lượt là ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của phần tử, chúng phụ thuộc vào các đặc trưng hình học, vật liệu của phần tử và tần số tải tác động ω .

Bài toán xác định tần số dao động riêng của kết cấu trong DSM trở thành bài toán trị riêng phi tuyến (Non-Linear Eigenproblem). Đặc điểm khác nhau nổi bật của DSM so với FEM là ta sẽ xác định được số lượng vô hạn các tần số dao động riêng ứng với một số lượng hữu hạn các bậc tự do của kết cấu. Một điểm khác nhau nữa giữa hai phương pháp là bậc tự do của kết cấu khi sử dụng DSM sẽ ít hơn so với FEM, điều này là do trong DSM, sự rời rạc hoá kết cấu thành những phần tử riêng biệt chỉ thực hiện khi kết cấu có sự thay đổi về tiết diện, vật liệu hoặc tại vị trí có tải trọng tập trung hoặc liên kết.

Bài toán trị riêng phi tuyến của phương pháp độ cứng động lực trong trường hợp không cần có dạng:

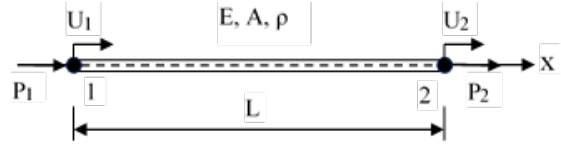
$$[D(\omega)]\{q\} = \{0\} \quad (2)$$

Trong đó, $[D(\omega)]$ là ma trận độ cứng động lực phụ thuộc vào tần số, $\{q\}$ là vectơ chuyển vị nút của kết cấu.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

2.1. Ma trận độ cứng động lực của phần tử thanh chịu kéo nén

Xét một phần tử thanh thẳng chịu lực dọc trục như Hình 1.



Hình 1. Phần tử chịu kéo (nén)

Phương trình vi phân chủ đạo của phần tử dao động dọc trục tự do:

$$\phi''(x) + \frac{\omega^2 m}{EA} \phi(x) = 0$$

Nghiệm của phương trình vi phân trên có dạng:

$$\phi = A_1 \cos \psi \xi + A_2 \sin \psi \xi \quad (3)$$

với: ψ là tham số động lực của thanh chịu lực dọc trục,

$$\psi = \omega L \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (4)$$

Trong đó, ξ là tham số chiều dài không thứ nguyên của thanh, $\xi = x/L$

A_1, A_2 là các hằng số phụ thuộc vào điều kiện biên:

$$\begin{cases} \phi(x=0) = U_1 \\ \phi(x=L) = U_2 \end{cases}$$

Thay (3) vào các điều kiện biên trên, ta được:

$$\begin{cases} A_1 = U_1 \\ A_2 = \frac{U_2}{\sin \psi} - \cot g \psi \cdot U_1 \end{cases} \quad (5)$$

Thay giá trị A_1, A_2 vào phương trình (3) ta được:

$$\phi = (\cos \psi \xi - \cot g \psi \cdot \sin \psi \xi) U_1 + \frac{\sin \psi \xi}{\sin \psi} U_2 \quad (6)$$

Hay ta có thể viết lại: $\phi = N \cdot U$

trong đó:

$N = [N_1 \ N_2]$ là vectơ hàm dạng của phần tử thanh chịu lực dọc trục:

$$N = \left[\cos \psi \xi - \cot g \psi \cdot \sin \psi \xi \quad , \quad \frac{\sin \psi \xi}{\sin \psi} \right] \quad (7)$$

$U = [U_1 \ U_2]^T$ là vectơ chuyển vị nút

Theo phương pháp phần tử hữu hạn:

$$M_e(\omega) = \int_{V_e} [N]^T [\rho] [N] dV_e \quad (8)$$

$$K_e(\omega) = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV_e \quad (9)$$

Trong đó, $[D] = [E]$ là ma trận các hằng số đàn hồi

$[B]$: ma trận biến dạng của phần tử chịu kéo nén, có dạng:

$$B = \left(\frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right)$$

Sử dụng các hàm dạng ở (7), từ (8) và (9) ta được:

$$M_e(\omega) = \frac{\rho AL}{2\psi \sin^2 \psi} \begin{bmatrix} \psi - \cos \psi \sin \psi & \sin \psi - \psi \cos \psi \\ \sin \psi - \psi \cos \psi & \psi - \cos \psi \sin \psi \end{bmatrix} \quad (10)$$

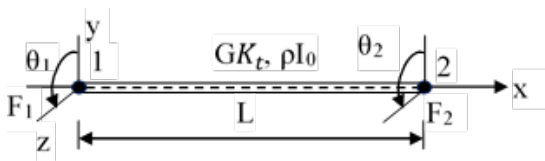
$$K_e(\omega) = \frac{AE\psi}{2L \sin^2 \psi} \begin{bmatrix} \psi + \cos \psi \sin \psi & -\sin \psi - \psi \cos \psi \\ -\sin \psi - \psi \cos \psi & \psi + \cos \psi \sin \psi \end{bmatrix} \quad (11)$$

Ma độ cứng động lực của phần tử thanh chịu kéo nén:

$$D^A(\omega) = K_e(\omega) - \omega^2 M_e(\omega) = \frac{EA}{L} \frac{\psi}{\sin \psi} \begin{bmatrix} \cos \psi & -1 \\ -1 & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (12)$$

2.2. Ma trận độ cứng động lực của phần tử thanh chịu xoắn

Xét một phần tử thanh thẳng chịu xoắn như hình 2.



Hình 2. Phần tử chịu xoắn

Về hình thức, phương trình dao động tự do của phần tử thanh chịu xoắn tương tự như (3):

$$\phi''(x) + \frac{\omega^2 \rho I_0}{GK_t} \phi(x) = 0 \quad (13)$$

Trong đó:

- ϕ - góc xoắn của tiết diện
- ρI_0 - quán tính xoắn trên một đơn vị chiều dài, với ρ là khối lượng riêng của vật liệu, I_0 là momen quán tính độc cực của tiết diện
- GK_t - độ cứng chống xoắn của tiết diện, với G là modul đàn hồi trượt và K_t là hằng số xoắn của mặt cắt.

Ma độ cứng động lực của phần tử thanh chịu xoắn:

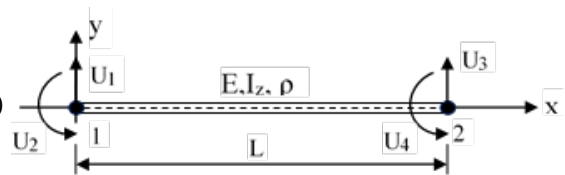
$$D^T(\omega) = \frac{GK_t}{L} \frac{\chi}{\sin \chi} \begin{bmatrix} \cos \chi & -1 \\ -1 & \cos \chi \end{bmatrix} \quad (14)$$

với: χ là tham số động lực của thanh chịu xoắn được tính theo:

$$\chi = \omega L \sqrt{\frac{\rho I_0}{GK_t}} \quad (15)$$

2.3. Ma trận độ cứng động lực của phần tử thanh chịu uốn trong mặt phẳng xy

Xét một phần tử thanh thẳng chịu uốn trong mặt phẳng xy như hình 3



Hình 3. Phần tử chịu uốn trong mặt phẳng xy

Phương trình vi phân của phần tử dao động tự do của thanh chịu uốn ứng với tần số ω :

$$\phi^{IV}(x) - \frac{\omega^2 m}{EI_z} \phi(x) = 0 \quad (16)$$

Nghiệm của phương trình vi phân trên có dạng:

$$\phi(x) = C_1 \cos \lambda \xi + C_2 \sin \lambda \xi + C_3 \cosh \lambda \xi + C_4 \sinh \lambda \xi \quad (17)$$

Hay viết dưới dạng ma trận:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \cos \lambda \xi \\ \sin \lambda \xi \\ \cosh \lambda \xi \\ \sinh \lambda \xi \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \quad (18)$$

với:

λ là tham số động lực của thanh chịu uốn, được xác định bởi:

$$\lambda = L \left(\frac{\rho A \omega^2}{EI_z} \right)^{1/4} \quad (19)$$

ξ là tham số chiều dài không thứ nguyên của thanh, $\xi = x/L$

C_1, C_2, C_3 và C_4 là các hằng số phụ thuộc vào điều kiện biên:

$$\begin{aligned} \phi(x=0) &= U_1, \quad \phi'(x=0) = U_2 \\ \phi(x=L) &= U_3, \quad \phi'(x=L) = U_4 \end{aligned}$$

Thay (17) vào các điều kiện biên và giải hệ phương trình, ta được:

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\lambda^3} \begin{bmatrix} \lambda^3 - F_4\lambda & F_2L\lambda & -F_3\lambda & F_1L\lambda \\ -F_6 & L\lambda^2 + F_4L & -F_5 & -F_3L \\ \lambda^3 + F_4\lambda & -F_2L\lambda & F_3\lambda & -F_1L\lambda \\ F_6 & L\lambda^2 - F_4L & F_5 & F_3L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

trong đó các hàm F_i ($i=1\div 6$) là các hàm tần số:

$$\begin{aligned} F_1 &= \lambda[\sinh\lambda - \sin\lambda]/\delta \\ F_2 &= \lambda[\sin\lambda\cosh\lambda - \cos\lambda\sinh\lambda]/\delta \\ F_3 &= \lambda^2[\cosh\lambda - \cos\lambda]/\delta \\ F_4 &= -\lambda^2[\sinh\lambda\sin\lambda]/\delta \\ F_5 &= -\lambda^3[\sinh\lambda + \sin\lambda]/\delta \end{aligned} \quad (21)$$

$$F_6 = \lambda^3[\sin\lambda\cosh\lambda + \cos\lambda\sinh\lambda]/\delta$$

$$\delta = 1 - \cosh\lambda\cos\lambda$$

Thay (20) vào (17) và biểu diễn kết quả dưới dạng ma trận:

$$\phi(x) = [N]\{U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4\}^T$$

với $[N]$ là ma trận các hàm dạng:

$$[N] = \frac{1}{2\lambda^3} \begin{Bmatrix} \cos\lambda\xi \\ \sin\lambda\xi \\ \cosh\lambda\xi \\ \sinh\lambda\xi \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda^3 - F_4\lambda & F_2L\lambda & -F_3\lambda & F_1L\lambda \\ -F_6 & L\lambda^2 + F_4L & -F_5 & -F_3L \\ \lambda^3 + F_4\lambda & -F_2L\lambda & F_3\lambda & -F_1L\lambda \\ F_6 & L\lambda^2 - F_4L & F_5 & F_3L \end{bmatrix} \quad (22)$$

Sử dụng các hàm dạng ở (22), từ (8) và (9) ta thu được ma trận độ cứng động lực của thanh chịu uốn trong mặt phẳng xy :

$$\begin{aligned} D^{xy}(\omega) &= K_e(\omega) - \omega^2 M_e(\omega) \\ &= \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} F_6 & -F_4L & F_5 & F_3L \\ & F_2L^2 & -F_3L & F_1L^2 \\ \text{đx} & & F_6 & F_4L \\ & & & F_2L^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

2.4. Ma trận độ cứng động lực của phần tử thanh chịu uốn trong mặt phẳng xz

Trong mặt phẳng xz , các chuyển vị nút U_3, U_4 và các lực P_3, P_4 đối dấu so với trong mặt phẳng xy .

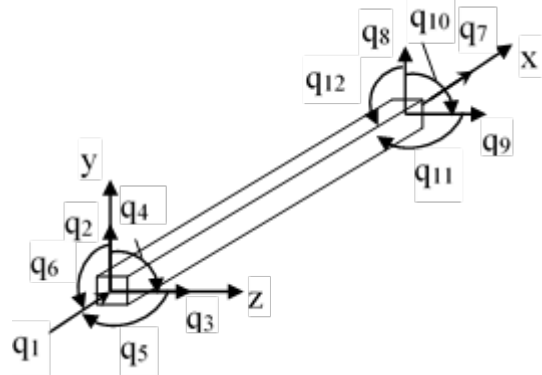
Như vậy, ma trận độ cứng động lực của phần tử thanh chịu uốn trong mặt phẳng xz được xác định giống như ma trận độ cứng động lực trong mặt phẳng xy , nhưng thay thế momen quán tính I_z bằng I_y và các phần tử của ma trận độ cứng phải nhân với hệ số bằng $(-1)^{a+b}$, trong đó a và b lần lượt là số hiệu của hàng và cột của ma trận.

$$D^{xz}(\omega) = \frac{EI_y}{L^3} \begin{bmatrix} F_6 & F_4L & F_5 & -F_3L \\ & F_2L^2 & F_3L & F_1L^2 \\ \text{đx} & & F_6 & -F_4L \\ & & & F_2L^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Với F_i ($i=1\div 6$) là các hàm tần số tính theo (21), phụ thuộc vào $\lambda = L \left(\frac{\rho A \omega^2}{EI_y} \right)^{1/4}$

2.5. Ma trận độ cứng động lực của phần tử thanh không gian

Giả thiết các biến dạng dọc trục, biến dạng xoắn và biến dạng uốn trong hai mặt phẳng quán tính chính của thanh là độc lập nhau, ma trận độ cứng động lực của phần tử thanh không gian được xây dựng bằng cách ghép nối các ma trận độ cứng động lực thành phần. Ghép nối các ma trận (12), (14), (23) và (24) ta được ma trận độ cứng động lực của thanh không gian ở hệ tọa độ địa phương có dạng:



Hình 4. Phần tử thanh không gian

$$D(\omega) = \begin{bmatrix} k_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{2,2} & 0 & 0 & 0 & k_{2,6} & 0 & k_{2,8} & 0 & 0 & 0 & k_{2,12} \\ 0 & 0 & k_{3,3} & 0 & k_{3,5} & 0 & 0 & 0 & k_{3,9} & 0 & k_{3,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{4,10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{5,3} & 0 & k_{5,5} & 0 & 0 & 0 & k_{5,9} & 0 & k_{5,11} & 0 \\ 0 & k_{6,2} & 0 & 0 & 0 & k_{6,6} & 0 & k_{6,8} & 0 & 0 & 0 & k_{6,12} \\ k_{7,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{7,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{8,2} & 0 & 0 & 0 & k_{8,6} & 0 & k_{8,8} & 0 & 0 & 0 & k_{8,12} \\ 0 & 0 & k_{9,3} & 0 & k_{9,5} & 0 & 0 & 0 & k_{9,9} & 0 & k_{9,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{10,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{10,10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11,3} & 0 & k_{11,5} & 0 & 0 & 0 & k_{11,9} & 0 & k_{11,11} & 0 \\ 0 & k_{12,2} & 0 & 0 & 0 & k_{12,6} & 0 & k_{12,8} & 0 & 0 & 0 & k_{12,12} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Trong đó, các thành phần $k_{i,j}$ với $i,j=1,7$ tương ứng với biến dạng dọc xác định theo (12); $i,j=4,10$ tương ứng với biến dạng xoắn xác định theo (14); $i,j=2,6,8,12$ tương ứng với biến dạng uốn trong mặt phẳng xy xác định theo (23); $i,j=3,5,9,11$ tương ứng với biến dạng uốn trong mặt phẳng xz xác định theo (24).

3. PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC KHUNG KHÔNG GIAN

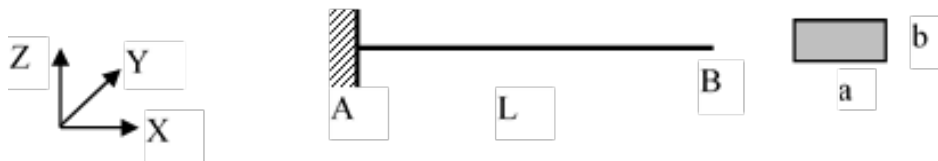
Khác với bài toán phân tích tần số dao động riêng bằng phương pháp phần tử hữu hạn là bài toán trị riêng tuyến tính, bài toán phân tích dao động riêng bằng phương pháp ma trận độ cứng động lực là *bài toán trị riêng phi tuyến*. Phương trình xác định tần số dao động riêng trong trường hợp không cân có dạng:

$$[D(\omega)]\{q\} = 0 \quad (26)$$

Để giải quyết bài toán này, trên thế giới đã có một số nghiên cứu đã đưa ra cách giải quyết như: giải thuật Wittrick – Williams, phương pháp lặp Newtonian,... Trong bài báo này, giải thuật Wittrick - Williams (Lee Usik et al., 2002) được áp dụng để xác định các tần số dao động riêng của kết cấu.

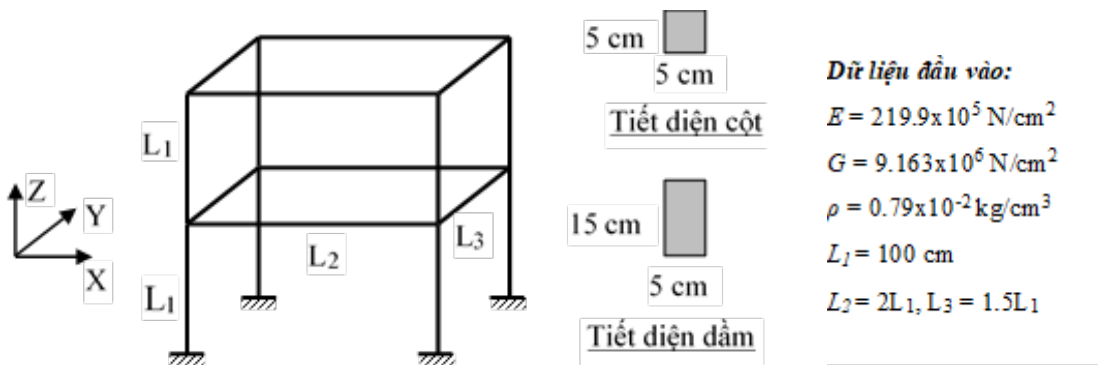
Bài toán 1:

Xét dầm console có các tham số hình học: $a = 25.4 \text{ mm}$, $b = 3.175 \text{ mm}$, $L = 0.6 \text{ m}$ và vật liệu: modul đàn hồi Young $E = 205.7 \text{ GN/m}^2$, modul đàn hồi trượt $G = 73.46 \text{ GN/m}^2$, khối lượng riêng $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ (Pretlove, 1999).



Hình 5. Dầm console

Bài toán 2:



Hình 6. Khung không gian

4. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

4.1. Kết quả bài toán 1

Kết quả bài toán 1 được trình bày trong Bảng 1 và Hình 7.

– So sánh kết quả thu được với kết quả thực nghiệm của Pretlove (1999), DSM cho kết quả chính xác ngay khi xem thanh là một phần tử duy nhất. Từ Bảng 1 ta có thể thấy kết quả phân tích của kết cấu không phụ thuộc vào việc chia nhỏ phần tử khi sử dụng DSM.

– FEM cho kết quả tần số dao động riêng ở mode 1 gần với kết quả của DSM, còn các tần số

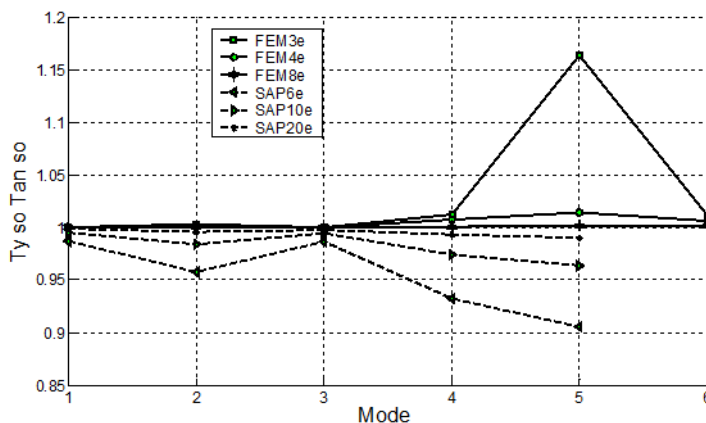
khác thì chênh lệch khá lớn với kết quả chính xác. Tuy nhiên kết quả hội tụ khá nhanh khi chia thanh thành 4 phần tử.

– Khi phân tích thanh console bằng SAP2000, khi xem thanh là một phần tử duy nhất thì chương trình chỉ phân tích được 3 tần số dao động riêng, và kết quả sai lệch rất nhiều so với kết quả chính xác. Khi chia thanh thành nhiều phần tử, kết quả tiến dần đến kết quả chính xác, tuy nhiên tốc độ hội tụ chậm. Một điểm đặc biệt, khi sử dụng SAP2000 để phân tích thì không tìm thấy giá trị tần số dao động riêng ứng với mode thứ 6 khi tính bằng DSM hay FEM (mode thứ 6 là mode dao động xoắn).

Bảng 1. Giá trị tần số dao động riêng f tính bằng các phương pháp

Phương pháp	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
<i>DSM</i>						
1_e	7.3163	45.8505	58.5303	128.3825	251.5787	304.4595
2_e	7.3163	45.8505	58.5303	128.3825	251.5787	304.4595
<i>FEM*</i>						
1_e	7.3511	58.8086	72.4219	335.7145	579.4231	2359.3879
3_e	7.3198	46.2395	58.5587	156.3905	312.3324	369.9163
4_e	7.3165	45.9039	58.5323	129.3766	255.2320	306.4193
8_e	7.3163	45.8541	58.5305	128.4607	252.1422	304.9487
<i>SAP2000*</i>						
1_e	5.0970	40.7455	1926.431			
2_e	6.5675	33.8265	52.4907	268.6010	2085.155	-
6_e	7.1123	41.8000	56.8368	110.6688	192.8341	-
10_e	7.2828	45.1275	58.1858	125.0710	242.4691	-
20_e	7.3078	45.6628	58.3954	127.5092	249.1453	-
<i>Kết quả thực nghiệm của Pretlove, 1999</i>						
	7.32	45.9	58.5	128.4	251.6	304.4

* n_e: thanh được chia thành n phần tử có kích thước bằng nhau



Hình 7. Tỷ số các tần số dao động riêng tính bằng FEM và SAP2000 so với DSM

4.2. Kết quả bài toán 2

Kết quả bài toán 2 được trình bày trong Bảng 2 và Hình 8.

Bảng 2 ghi kết quả tính toán 6 tần số dao động riêng đầu tiên của khung trên hình 6 theo DSM, FEM và SAP2000.

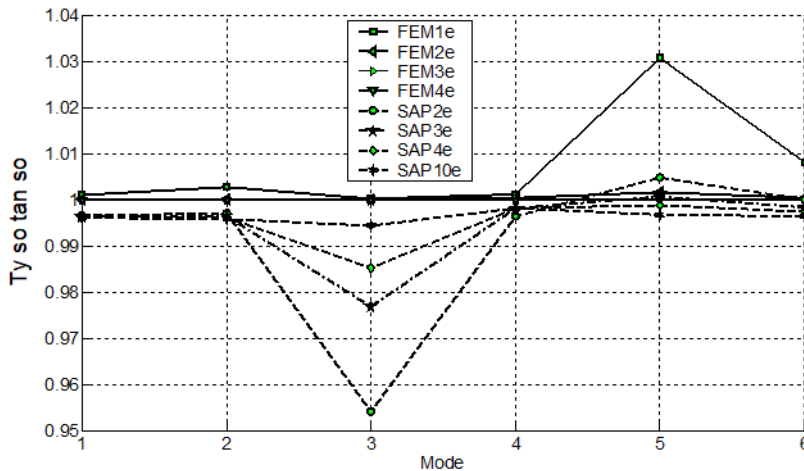
– Khi mô hình một thanh là một phần tử thì FEM cho kết quả các tần số dao động riêng gần với kết quả của DSM, khi chia thành hai phần tử thì có thể xem kết quả của FEM là kết quả chính xác.

– Khi dùng SAP2000 để phân tích khung, nếu mô hình mỗi thanh là một phần tử thì các tần số dao động riêng ở mode 1,2,5,6 rất gần với DSM, còn ở mode 3,4 thì kết quả phân tích của FEM sai khác với kết quả của DSM khá nhiều. Khi chia thành hai phần tử thì kết quả tiến dần đến kết quả của DSM. Tuy nhiên nếu tiếp tục chia nhỏ phần tử thì ngoại trừ ở mode 3, thì các tần số dao động riêng ở các mode còn lại có khuynh hướng tiến ra xa dần kết quả phân tích của DSM.

Bảng 2. Các giá trị tần số dao động riêng (Hz) tính bằng các phương pháp

Phương pháp	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
DSM	10.3017	10.3244	12.7785	24.3874	26.1860	27.3407
FEM*						
1_e	10.3126	10.3543	12.7821	24.4175	26.9918	27.5663
2_e	10.3024	10.3273	12.7796	24.3976	26.2331	27.3551
3_e	10.3019	10.3248	12.7787	24.3896	26.1953	27.3436
4_e	10.3018	10.3246	12.7785	24.3881	26.1889	27.3417
SAP2000*						
1_e	10.2453	10.3267	10.5302	21.4936	26.9751	27.0554
2_e	10.2673	10.3010	12.0752	24.3748	26.3477	27.3474
3_e	10.2646	10.2908	12.4276	24.3763	26.2231	27.2955
4_e	10.2634	10.2870	12.5574	24.3647	26.1677	27.2727
10_e	10.2621	10.2827	12.7015	24.3488	26.1038	27.2465

* n_e: thanh được chia thành n phần tử có kích thước bằng nhau



Hình 8. Tỷ số các tần số dao động riêng tính bằng FEM và SAP2000 so với DSM

5. KẾT LUẬN

Bài báo đã xây dựng được các ma trận độ cứng động lực cho các phần tử thanh chịu kéo nén, xoắn và uốn trên cơ sở tìm nghiệm chính xác của phương trình vi phân dao động tự do theo lý thuyết dầm Euler-Bernoulli. Khi tần số ω dần đến 0, ta sẽ thu

được các ma trận độ cứng tĩnh, ma trận khối lượng của phần tử thanh trong phương pháp phần tử hữu hạn. Điều đó chứng tỏ, kết quả của phương pháp phần tử hữu hạn là một trường hợp đặc biệt của phương pháp độ cứng động lực.

Khi sử dụng DSM, độ chính xác của kết quả phân tích không phụ thuộc vào việc rời rạc hoá phần tử (sự rời rạc hoá kết cấu thành những phần tử riêng biệt chỉ thực hiện khi kết cấu có sự thay đổi về tiết diện, vật liệu hoặc tại vị trí có liên kết).

FEM sử dụng mô hình khối lượng tương thích cho kết quả gần với kết quả chính xác ở những tần số cơ bản đầu khi xem mỗi thanh là một phần tử, tuy nhiên các tần số bậc cao thì sai số rất lớn. SAP2000 sử dụng mô hình khối lượng thu gọn, nếu rời rạc phần tử quá thô thì kết quả phân tích sẽ sai số rất lớn so với kết quả chính xác, nếu rời rạc thanh thành nhiều phần tử thì kết quả sẽ tiến dần về kết quả phân tích của phương pháp độ cứng động lực.

Một ưu điểm khác của phương pháp độ cứng động lực là số lượng các tần số dao động riêng tìm được là vô hạn, không phụ thuộc vào việc chia phần tử. Trong khi đó, phương pháp phần tử hữu hạn (hay SAP2000) chỉ tìm được một số lượng hữu hạn các tần số dao động riêng, vì số lượng tần số dao động riêng phụ thuộc vào số bậc tự do khác không của kết cấu.

Từ các kết quả chính xác khi phân tích các bài toán hệ thanh không gian bằng phương pháp độ

cứng động lực và sự tiện lợi của phương pháp, ta nên sử dụng phương pháp này như là một công cụ tính toán đáng tin cậy khi phân tích động lực học kết cấu công trình.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Banerjee, J. R. (2003). Free vibration of sandwich beams using the dynamic stiffness method. *Computers & Structures*, 81(18-19), 1915 – 1922.
- Đỗ Huỳnh Phước. (2008). *Phân tích tần số riêng của hệ thanh phẳng bằng phương pháp độ cứng động lực*. Luận văn cao học. Trường Đại học Bách Khoa thành phố Hồ Chí Minh. Thành phố Hồ Chí Minh.
- Lee, U., Kim, J., Shin, J. & Leung, A. Y. T. (2002). Development of a Wittrick – Williams algorithm for the spectral element model of elastic – piezoelectric two - layer active beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 44(2), 305–318.
- Pretlove, A. J. (1999). Modern methods in the study of beam vibrations. *International Journal of Mechanical Engineering Education*, 27(4), 324 – 336
- Trần Văn Liên. (2005). Xây dựng ma trận độ cứng động lực và vectơ tải trọng nút của phần tử dầm chịu uốn tổng quát. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng*, 2, 13 – 17.