Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/jvn.2016.608

SỰ TỒN TẠI VÀ TÍNH DUY NHẤT NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN BIÊN BAN ĐẦU THỨ HAI ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH SCHRÖDINGER CẤP HAI TRONG HÌNH TRỤ ĐÁY KHÔNG TRƠN

Phùng Kim Chức
Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ

Thông tin chung:
Ngày nhận: 06/06/2016
Ngày chấp nhận: 22/12/2016

Title:
The uniqueness and existence of solution of this seccond innitial boundary problem for second-order Schrödinger equation in cylinders with nonsmooth bases

Từ khóa:
Bài toán biên ban đầu thứ hai, phương trình Schrödinger, nghiệm suy rộng, hình trụ đáy không trơn

Keywords:
Second initial boundary value problem, Schrödinger equation, generalized solution, cylinders with nonsmooth bases

ABSTRACT

Cauchy-Dirichlet problem for the general Schrödinger systems in domains containing conical points has been investigated by Nguyen Manh Hung (1998). In this paper, we study the second initial boundary value problem for second-order Schrödinger equations in cylinders with nonsmooth bases $Q_T, 0 < T \le +\infty$. *The purpose of this paper is to study the unique solvability of generalized solution of the problem.*

TÓM TẮT

Bài toán Cauchy-Dirichlet đối với hệ phương trình Schrödinger tổng quát trong miền chứa điểm nón đã được tác giả Nguyen Manh Hung (1998) nghiên cứu. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu về bài toán biên ban đầu thứ hai đối với phương trình Schrödinger cấp hai trong hình trụ đáy không trơn $Q_T, 0 < T \le +\infty$. *Bài báo trình bày kết quả về sự tồn tại duy nhất của nghiệm suy rộng.*

Trích dẫn: Phùng Kim Chức, 2016. Sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm của bài toán biên ban đầu thứ hai đối với phương trình Schrödinger cấp hai trong hình trụ đáy không trơn. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 47a: 114-119.

1 MỞ ĐẦU

Bài toán giá trị biên đối với phương trình Schrödinger trong hình trụ hữu hạn biên trơn đã được xét trong công trình của Lions và Magenes (1972). Bài báo này đã công bố các kết quả đối với phương trình Schrödinger với các hệ số a_{pq} là những hàm không phụ thuộc vào biến t.

Bài toán giá trị biên đối với hệ phương trình Schrödinger trong hình trụ vô hạn biên không trơn đã được xét trong công trình của Nguyễn Mạnh Hùng và Nguyễn Thị Kim Sơn (2008). Trong công trình này tác giả đã giải quyết bài toán với hệ phương trình Schrödinger tổng quát.

Trong bài báo này, chúng tôi xét bài toán biên ban đầu thứ hai đối với phương trình Schrödinger cấp hai trong miền trụ với đáy không trơn. Các hệ số $a_{pq}(x,t)$ ở đây là những hàm phụ thuộc vào cả hai biến x và t.

Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n, n\ge 2$ với biên của nó là $\partial\Omega$ thỏa mãn điều kiện $\Gamma=\partial\Omega\backslash\{O\}$ là mặt khả vi vô hạn và Ω trùng với nón $K=\{x: \frac{x}{|x|}\in G\}$ trong lân cận của gốc tọa độ

O, ở đó G là một miền trơn trong mặt cầu đơn vị S^{n-1} của $\mathbb{R}^n$.

Với mỗi số thực dương T, đặt $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$, $S_T=\partial\Omega\times(0,T)$, $\Omega_\infty=\Omega\times(0,\infty)$, $\overline{\Omega}_\infty=\overline{\Omega}\times(0,\infty)$. Với mỗi đa chỉ số $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$, ta đặt $|\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_n$ và kí hiệu $D^\alpha=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$.

Với mỗi hàm véc tơ giá trị phức $u=(u_1,...,u_s)$ xác định trong Ω, ta kí hiệu $D_u^\alpha=(D_{u_1}^\alpha,...,D_{u_s}^\alpha)$, $u_{t^j}=\dfrac{\partial^j u}{\partial t^j}=(\dfrac{\partial^j u_1}{\partial t^j},...,\dfrac{\partial^j u_s}{\partial t^j})$, $|u|=(\sum_{j=1}^{s}|u_j|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Giả sử l là một số nguyên không âm, trong bài báo này chúng tôi sử dụng các không gian hàm sau.

$C^l(\Omega)$ là không gian các hàm khả vi liên tục đến cấp $l>0$ trên Ω.

$C(\Omega)=C^0(\Omega)$ là không gian các hàm liên tục trên Ω.

$C^\infty(\Omega)=\bigcup_{l=0}^{\infty}C^l(\Omega)$ là không gian các hàm khả vi vô hạn trên Ω.

$C_0^\infty(\Omega)$ là không gian các hàm khả vi vô hạn có giá compact trong Ω.

$L_2(\Omega)$ là không gian các hàm bình phương khả tích trên Ω với chuẩn $\|u\|_{L_2(\Omega)}=(\int_\Omega|u(x)|^2dx)^{\frac{1}{2}}$.

$L_2(\gamma,\Omega_T)$ là không gian các hàm bình phương khả tích trên Ω_T với chuẩn $\|u\|_{L_2(e^{\gamma t},\Omega_T)}=(\int_{\Omega_T}|u(x,t)|^2e^{-2\gamma t}dxdt)^{\frac{1}{2}}$.

$H^l(\Omega)$ là không gian gồm các hàm vec tơ $u(x)$ có đạo hàm suy rộng $D^pu\in L_2(\Omega),|p|\le l$, với chuẩn

$$\|u\|_{H^l(\Omega)}=(\int_\Omega\sum_{|p|\le l}|D^pu|^2dx)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

$H^{l,0}(e^{\gamma t},\Omega_T)(\gamma\in\mathbb{R})$ là không gian gồm các hàm $u(x,t)$, $(x,t)\in\Omega_T$ có đạo hàm suy rộng $D^pu,|p|\le l$ với chuẩn

$$\|u\|_{H^{l,0}(e^{\gamma t},\Omega_T)}=(\int_{\Omega_T}\sum_{|p|\le l}|D^pu|^2e^{-2\gamma t}dxdt)^{\frac{1}{2}}<\infty$$

Đặc biệt, chúng ta đặt $L_2(\gamma,\Omega_T)=H^{0,0}(e^{\gamma t},\Omega_T)$.

$H^{l,1}(e^{\gamma t},\Omega_T)(\gamma\in\mathbb{R})$ là không gian gồm các hàm $u(x,t)$, $(x,t)\in\Omega_T$ có đạo hàm suy rộng $D^pu,|p|\le l$ với chuẩn

$$\|u\|_{H^{l,1}(e^{\gamma t},\Omega_T)}=(\int_{\Omega_T}\sum_{|p|\le l}(|D^pu|^2+|u_t|^2)e^{-2\gamma t}dxdt)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

$L^\infty(0,T;L_2(\Omega))$ là không gian gồm các hàm giá trị phức đo được $u:(0,T)\to L_2(\Omega),t\mapsto u(.,t)$ thỏa mãn

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L_2(\Omega))}=\operatorname{ess}\sup_{0<t<T}\|u(.,t)\|_{L_2(\Omega)}.$$

Bây giờ chúng ta sẽ giới thiệu toán tử vi phân sử dụng trong suốt bài báo

$$L=L(x,t,D)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j})+a, \qquad (1.1)$$

ở đó $a_{ij}\equiv a_{ij}(x,t)$, $i,j=1,...,n$ là các hàm giá trị phức bị chặn khả vi vô hạn trong $\overline{\Omega}_\infty$ và $a\equiv a(x,t)$ là hàm giá trị thực bị chặn khả vi vô hạn trong $\overline{\Omega}_\infty$. Hơn nữa chúng ta giả sử $a_{ij}(x,t)=\overline{a}_{ji}(x,t)$ với mọi $i,j=1,...,n$, điều này có nghĩa là toán tử L tự liên hợp hình thức.

Giả sử rằng $a_{ij}, i,j=1,...,n$ liên tục theo $x\in\overline{\Omega}$ đều với $t\in[0,\infty)$ và tồn tại một hằng số dương α_0 sao cho

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \alpha_0|\xi|^2, \forall \xi\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\},(x,t)\in\bar{\Omega}_\infty . \quad (1.2)$$

Trong hình trụ Q_T, $0<T\le\infty$, chúng ta xét bài toán biên ban đầu thứ hai đối với phương trình Schrödinger cấp hai:

$$iL(x,t,D)u-u_t=f(x,t), (x,t)\in Q_T, \quad (1.3)$$

$$u\big|_{t=0}=0, \quad x\in\Omega \quad (1.4)$$

$$Nu\big|_{S_T}=0, \quad (1.5)$$

ở đó $f(x,t)$ là vectơ hàm giá trị phức, $L(x,t,D)$ là toán tử (1.1) đã giới thiệu ở trên,

$$Nu=N(x,t,D)u=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(x_i,v),$$

v là vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài đến S_T.

Hàm $u(x,t)$ được gọi là nghiệm suy rộng trong không gian $H^{1,0}(e^{\gamma t},Q_T)$ của bài toán (2.1) – (2.3) nếu $u(x,t)\in H^{1,0}(e^{\gamma t},Q_T)$, và với mỗi τ, $0<\tau<T$, đẳng thức sau

$$\int_{Q_\tau}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\overline{\partial\eta}}{\partial x_i}-au\bar{\eta}\Big)dxdt+i\int_{Q_\tau} u\bar{\eta}_t dxdt = i\int_{Q_\tau} f\bar{\eta}dxdt \quad (1.6)$$

đúng với mọi hàm thử $\eta\in H^{1,1}(e^{\gamma t},Q_T)$, sao cho $\eta(x,t)=0$, $t\in[\tau,T)$.

2 TÍNH DUY NHẤT NGHIỆM

Định lý 2.1 (Định lí về tính duy nhất nghiệm của bài toán). Giả sử các hệ số của toán tử L(x,t,D) thỏa mãn điều kiện (1.2) và

$$\sup\left\{\Big|\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\Big|,\Big|\frac{\partial a}{\partial t}\Big|\right\}\le\mu, i,j=1,...,n, \forall(x,t)\in\bar{Q}_T, \mu=\text{const}>0.$$

Thì bài toán (1.3)-(1.5) có không quá một nghiệm suy rộng trong không gian $H^{1,0}(e^{\gamma t},Q_T)\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ với mọi $\gamma>0$.

Để chứng minh Định lí 2.1 trước tiên ta giới thiệu các bổ đề sau cho có thể tìm thấy cách chứng minh nó trong Nguyễn Mạnh Hùng, Nguyễn Thị Kim Sơn (2008).

Kí hiệu

$$B(u,v,t)=\int_\Omega\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\overline{\partial v}}{\partial x_j}-a(x,t)u\bar{v}\Big)dx.$$

Bổ đề 2.1 Giả sử các hệ số $a_{ij}=a_{ij}(x,t), i,j=1,...,n, a=a(x,t)$ của toán tử L(x,t,D) thỏa mãn điều kiện (1.2) và $a_{ij}(x,t)$ liên tục theo $x\in\bar{\Omega}$ đều với $t\in[0,\infty)$. Khi đó tồn tại hằng số $\mu_0>0$ sao cho $B(u,u,t)\ge\mu_0\|u\|_{H^1(\Omega)}$, $\forall u\in H^1(\Omega), t\in(0,+\infty)$.

(Xem Nguyen Manh Hung and Phung Kim Chuc (2012) để biết chi tiết về sự tồn tại của μ_0

Bổ đề 2.2 (Bất đẳng thức Gronwall-Bellman) Giả sử u(t) và $\phi(t)$ là những hàm khả tích không âm trên đoạn [0,T] và $\phi(t)$ có đạo hàm $\phi'(t)$ khả tích trên [0,T] sao cho

$$u(t)\le\phi(t)+L\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau$$

với mọi $t\in[t_0,T], t_0\ge0$, ở đó L là hằng số dương. Khi đó

$$u(t)\le\phi(t_0)+\int_{t_0}^{t} e^{L(t-\tau)}\phi'(\tau)d\tau$$

với mọi $t\in[t_0,T]$.

Bây giờ ta chứng minh định lí 2.1.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $\gamma>0$ bài toán (1.3) – (1.5) có hai nghiệm suy rộng u_1 và u_2. Đặt $u=u_1-u_2\in H^{1,0}(e^{\gamma t},Q_T)$. Khi đó *u* thỏa mãn đồng nhất thức tích phân (1.6) với *f* = 0 và *u*(*x*,0) = 0. Định nghĩa hàm $\eta(x,t)$ như sau:

$$\eta(x,t)=\begin{cases} 0 & b\le t\le T \\ \int_b^t u(x,\tau)d\tau & 0\le t\le b \end{cases} \quad (2.1)$$

Không khó khăn ta kiểm tra được $\eta(x,t)\in H^{1,1}(e^{\gamma t},Q_T)$, $\eta(x,t)=0$ với $t\in[b,T)$ và có $\eta_t(x,t)=u(x,t)$ với mọi $(x,t)\in Q_b$.

Thay $u=\eta_t$ và chọn hàm thử lại chính hàm η đã chọn ở trên vào (1.6) với *f* = 0, ta nhận được.

$$\int\limits_{Q_b}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial\eta_t}{\partial x_j}\frac{\overline{\partial\eta}}{\partial x_i}-a\eta_t\overline{\eta}\Big)dxdt+i\int\limits_{Q_b}\eta_t\overline{\eta_t}\,dxdt=0 \cdot \quad (2.2)$$

Cộng đẳng thức (2.2) với liên hợp phức của nó ta được

$$\int\limits_{Q_b}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial\eta_t}{\partial x_j}\frac{\overline{\partial\eta}}{\partial x_i}\Big)-a\frac{\partial}{\partial t}(\eta\overline{\eta})\Big)dxdt=0\,. \quad (2.3)$$

Nhờ tích phân từng phần theo t và điều kiện $u(x,0)=0$, ta nhận được đẳng thức sau:

$$B(\eta,\eta,0)=\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{Q_b}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\frac{\overline{\partial\eta}}{\partial x_j}dxdt-\int\limits_{Q_b}\frac{\partial a}{\partial t}\eta\overline{\eta}dxdt\,. \quad (2.4)$$

Sử dụng giả thiết về a_{ij}, a và bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\|\eta(.,0)\|^2_{H^1(\Omega)}\le C\|\eta\|^2_{H^{1,0}(\Omega)},(C=(n+1)\mu/\mu_0>0) \quad (2.5)$$

Bây giờ chúng ta đặt

$$v_i(x,t)=\int_t^0\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x_i}d\tau, 0<t<b, i=1,...,n,$$

$$v_0(x,t)=\int_t^0 u(x,\tau)d\tau$$

Với cách đặt như trên ta có

$$\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial x_i}=\int_b^t\frac{\partial\eta(x,\tau)}{\partial x_i}d\tau=v_i(x,b)-v_i(x,t), i$$
$$=1,...,n,\ \eta(x,t)=v_0(x,b)-v_0(x,t)$$

$$\frac{\partial\eta(.,0)}{\partial x_i}=v_i(x,b), i=1,...,n,\ \eta(.,0)=v_0(x,b)$$

$$\|\eta(.,0)\|^2_{H^1(\Omega)}=\sum_{i=0}^{n}\|v_i(.,b)\|^2_{L_2(\Omega)} \quad (2.6)$$

Thay vào (2.5) ta được

$$\sum_{i=0}^{n}\|v_i(.,b)\|^2_{L_2(\Omega)}\le 2Cb\sum_{i=0}^{n}\|v_i(.,t)\|^2_{L_2(\Omega)} +2C\int_0^b\sum_{i=0}^{n}\|v_i(.,t)\|^2_{L_2(\Omega)}dt \quad (2.7)$$

Bây giờ ta đặt

$$J(t)=\sum_{i=0}^{n}\|v_i(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

ta nhận được $(1-2Cb)J(b)\le 2C\int_0^b J(t)dt$, $C=const>0$ với hầu khắp $b\in[0,\frac{1}{4C}]$. Áp dụng Bất đẳng thức Gronwall-Bellman ta được $J(b)=0$ với hầu khắp $b\in[0,\frac{1}{4C}]$, do đó $u(x,b)=0$ với hầu khắp $b\in[0,\frac{1}{4C}]$. Dùng lí luận tương tự như trên và sau hữu hạn bước ta được $u(x,b)=0$ với hầu khắp $b\in[0,T]$. Mặt khác, vì T là số dương bất kỳ nên ta có kết luận $u_1(x,b)=u_2(x,b)$ trong không gian $H^{1,0}(e^{\gamma t},Q_T)$.

Định lí được chứng minh.

3 SỰ TỒN TẠI NGHIỆM

Định lý 3.1 (Định lí về sự tồn tại của nghiệm suy rộng). Giả sử các hệ số của toán tử L(x,t,D) thỏa mãn điều kiện (1.2) và

i) $\sup\left\{|\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}|,|\frac{\partial a}{\partial t}|\right\}\le\mu, i,j=1,...,n,\forall(x,t)\in\overline{Q}_T,\mu=\text{const}>0$

ii) $f, f_t\in L^\infty(0,\infty;L_2(\Omega))$,

iii) $f(x,0)=0$.

Khi đó tồn tại một hằng số γ_0 sao cho với mỗi $\gamma>\gamma_0$, bài toán (1.3)-(1.5) có duy nhất một nghiệm suy rộng $u(x,t)$ trong không gian $H^{1,0}(e^{\gamma t},Q_T)$. Hơn nữa bất đẳng thức sau đúng

$$\|u\|_{H^{1,0}(e^{\gamma t},Q_\infty)}\le C(\|f(.,0)\|^2_{L_2(\Omega)} +\|f\|^2_{L^\infty(0,\infty;L_2(\Omega))}+\|f_t\|^2_{L^\infty(0,\infty;L_2(\Omega))})$$

ở đó C là hằng số dương không phụ thuộc vào u và f.

Chứng minh. Sự duy nhất nghiệm của bài toán được suy ra từ Định lí 2.1. Sự tồn tại nghiệm của bài toán (1.3)-(1.5) được chứng minh nhờ phương pháp xấp xỉ Galerkin.

Giả sử $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ là một hệ hàm trong $H^1(\Omega)$ sao cho bao đóng tuyến tính của nó lại chính là $H^1(\Omega)$ và một hệ trực chuẩn trong $L_2(\Omega)$. Với mỗi số nguyên dương N ta xét hàm

$$u^N = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t)\varphi_k(x)$$

ở đó $(C_1^N(t),...,C_N^N(t))$ là nghiệm của hệ phương trình vi phân thường tuyến tính cấp hai:

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\frac{\overline{\partial\varphi_l}}{\partial x_i} - au^N\overline{\varphi}_l\Big)dx - i\int_\Omega \frac{\partial u^N}{\partial t}\overline{\varphi}_l dx = i\int_\Omega f\overline{\varphi}_l dx \tag{3.1}$$

với điều kiện ban đầu là $C_k^N(0)=0, k=1,...,N.$ (3.2)

Nhân đẳng thức (3.1) với $\overline{\dfrac{dC_l^N(t)}{dt}}$ và lấy tổng theo l từ 0 đến N, ta nhận được:

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\frac{\overline{\partial u_t^N}}{\partial x_i} - au^N\overline{u_t^N}\Big)dx - i\int_\Omega u_t^N\overline{u_t^N}dx = i\int_\Omega f\overline{u_t^N}dx \tag{3.3}$$

Giả sử τ là một số dương, $\tau<T$, tích phân hai vế của (3,3) theo *t* từ 0 đến τ ta được

$$\int_{Q_\tau} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\frac{\overline{\partial u_t^N}}{\partial x_i} - au^N\overline{u_t^N}\Big)dxdt - i\int_{Q_\tau} u_t^N\overline{u_t^N}dxdt = i\int_{Q_\tau} f\overline{u_t^N}dxdt \tag{3.4}$$

Cộng (3.4) với liên hợp phức của nó ta có

$$\int_{Q_\tau} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\frac{\overline{\partial u_t^N}}{\partial x_i}\Big) - a\frac{\partial}{\partial t}(u^N\overline{u_t^N})\Big)dxdt = 2\,\mathrm{Im}\int_{Q_\tau} f\overline{u_t^N}dxdt \tag{3.5}$$

Từ đây, tích phân từng phần (3.5) với điều kiện (3.2) ta nhận được

$$\begin{aligned} B(u^N,u^N,\tau) &= \int_{Q_\tau}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\frac{\overline{\partial u^N}}{\partial x_i} - \frac{\partial a}{\partial t}u^N\overline{u^N}\Big)dxdt \\ &+ B(u^N,u^N,0) - 2\,\mathrm{Im}\int_\Omega f(x,0)\overline{u^N}(x,0)dx \\ &+ 2\,\mathrm{Im}\Big[\int f(x,\tau)\overline{u^N}(x,\tau)dx - \int_{Q_\tau} f_t\overline{u^N}dxdt\Big] \end{aligned} \tag{3.6}$$

Áp dụng bổ đề (2.1) và bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \|u^N(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)} &\le \frac{(n+1)\mu+\varepsilon}{\mu_0-\varepsilon}\int_0^\tau \|u^N(.,t)\|^2_{H^1(\Omega)}dt \\ &+ \frac{(n+1)\mu+\varepsilon}{\mu_0-\varepsilon}\|u^N(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)} \\ &+ \frac{1}{\varepsilon(\mu_0-\varepsilon)}\Big[\|f(.,0)\|^2_{L_2(\Omega)} \\ &+ \|f\|^2_{L^\infty(0,\infty;L_2(\Omega))} \\ &+ \|f_t\|^2_{L^\infty(0,\infty;L_2(\Omega))}\Big] \end{aligned} \tag{3.7}$$

ở đó $0<\varepsilon<\mu_0$.

Áp dụng bổ đề (2.2) (*bất đẳng thức Gronwall-Bellman*) vào (3.7) ta được

$$\begin{aligned} \|u^N(.,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)} &\le C_1\Big[\|f(.,0)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^\infty(0,\infty;L_2(\Omega))} \\ &+ \|f_t\|^2_{L^\infty(0,\infty;L_2(\Omega))}\Big]e^{\frac{(n+1)\mu+\varepsilon}{\mu_0-\varepsilon}} \end{aligned} \tag{3.8}$$

ở đó

$$C_1 = \max\Big\{\frac{(n+1)\mu}{\mu_0-\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon(\mu_0-\varepsilon)}\Big\} > 0.$$

Đặt $\gamma_0 = \dfrac{(n+1)\mu}{2\mu_0} = \inf_{\varepsilon\in(0,\mu_0)} \dfrac{(n+1)\mu+\varepsilon}{2(\mu_0-\varepsilon)}$.

Với mỗi hằng số dương γ sao cho $\gamma>\gamma_0$ ta thấy tồn tại một hằng số dương $\varepsilon\in(0,\mu_0)$ sao cho $\gamma > \dfrac{(n+1)\mu+\varepsilon}{2(\mu_0-\varepsilon)} > \gamma_0 = \dfrac{(n+1)\mu}{2\mu_0}$ hay $-2\gamma + \dfrac{(n+1)\mu+\varepsilon}{\mu_0-\varepsilon} < 0$.

Nhân cả hai vế của (3.8) với $e^{-2\gamma\tau}$, sau đó lấy tích phân theo biến τ từ 0 đến ∞ ta được

$$\begin{aligned} \|u^N\|^2_{H^{1,0}(e^{\gamma t},Q_\infty)} &\le C_2\Big[\|f(.,0)\|^2_{L_2(\Omega)} \\ &+ \|f\|^2_{L^\infty(0,\infty:L_2(\Omega))} + \|f_t\|^2_{L^\infty(0,\infty:L_2(\Omega))}\Big] \end{aligned}$$

(3.9)

ở đó C_2 là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào μ và μ_0.

Từ (3.9) suy ra $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ là một dãy bị chặn đều trong không gian $H^{1,0}(e^{-\gamma t}, Q_\infty)$.

Do đó, có thể lấy ra được một dãy con của dãy $\{u^N\}$ (ta vẫn dùng ký hiệu là $\{u^N\}$) hội tụ yếu trong $H^{1,0}(e^{-\gamma t}, Q_\infty)$ tới một hàm $u(x,t) \in H^{1,0}(e^{-\gamma t}, Q_\infty)$.

Bây giờ ta chứng minh $u(x,t)$ là nghiệm suy rộng của bài toán (1.3) – (1.5) trong không gian $H^{1,0}(e^{\gamma t}, Q_\infty)$. Thật vậy; do $u^N(x,0)=0$ nên dễ dàng chứng minh được $u(x,0)=0$ trong Ω, tức là điều kiện ban đầu được thỏa mãn. Ta còn phải đi chứng minh hàm $u(x,t)$ thỏa mãn hệ thức (1.5).

Nhân cả hai vế (3.1) với $d_l(t) \in H^1(0,T)$, $d_l(T)=0$. Lấy tổng đẳng thức nhận được theo tất cả l từ 1 đến N và lấy tích phân theo t từ 0 đến T. Sau đó lấy tích phân từng phần theo t số hạng đầu tiên, chúng ta nhận được

$$\int_{Q_T} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u^N}{\partial x_j} \overline{\frac{\partial \eta}{\partial x_i}} - a u^N \overline{\eta} \Big) dxdt - i \int_{Q_T} u_t^N \overline{\eta} dxdt = i \int_{Q_T} f \overline{\eta} dxdt \quad (3.10)$$

Ta thấy ngay

$$\int_{Q_T} u_t^N \overline{\eta} dxdt = - \int_{\Omega} u^N(x,0) \overline{\eta(x,0)} dx - \int_{Q_T} u^N \overline{\eta_t} dxdt . (3.11)$$

Thay (3.11) vào (3.10) ta có

$$\int_{Q_T} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u^N}{\partial x_j} \overline{\frac{\partial \eta}{\partial x_i}} - a u \overline{\eta} \Big) dxdt + i \int_{Q_T} u^N \overline{\eta_t} dxdt = -i \int_{\Omega} u^N(x,0) \overline{\eta_t} dx + i \int_{Q_T} f \overline{\eta} dxdt$$

Cho đẳng thức trên qua giới hạn với dãy hội yếu khi N dần tới ∞, ta được

$$\int_{Q_\tau} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \overline{\frac{\partial \eta}{\partial x_i}} - a u \overline{\eta} \Big) dxdt + i \int_{Q_\tau} u \overline{\eta_t} dxdt = i \int_{Q_\tau} f \overline{\eta} dxdt \quad (3.12)$$

Ký hiệu M_N là tập hợp tất cả phần tử dạng

$$M_N = \{ \eta = \sum_{i=1}^{N} d_l(t) \varphi_l(x) ,\ d_l(t) \in H^1(0,T) , d_l(T)=0 \}$$

$$\widehat{H}^{1,1}(Q_T) = \{ \eta(\mathrm{x,t}) \in \mathrm{H}^{1,1}(Q_T), \eta(x,T)=0 \}$$

và $M = \bigcup_{N=1}^{\infty} M_N$, thì tập hợp M trù mật trong $\widehat{H}^{1,1}(Q_T)$. Từ đó suy ra (3.12) đúng với $\eta \in H^{1,1}(Q_T)$, thỏa mãn điều kiện $\eta(x,t)=0$ với $t \in [T,\infty)$. Hơn nữa ta có

$$\| u \|_{H^{1,0}(e^{\gamma t}, Q_\infty)} \le C (\| f(.,0) \|^2_{L_2(\Omega)} + \| f \|^2_{L^\infty(0,\infty; L_2(\Omega))} + \| f_t \|^2_{L^\infty(0,\infty; L_2(\Omega))})$$

Định lý được chứng minh.

4 MỘT SỐ HƯỚNG NGHIÊN CỨU TIẾP TỤC

Kết quả của bài toán đã nêu trong bài báo được lấy làm cơ sở để nghiên cứu tính chính quy của nghiệm và biểu diễn tiêm cận nghiệm của bài toán.

Phương pháp giải quyết bài toán trong bài báo được áp dụng giải quyết các bài toán tương tự như các công trình của Nguyễn Mạnh Hùng và Phùng Kim Chức (2012), (2014).

Chúng ta có thể thay đổi γ_0 để được không gian nghiệm rộng hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

R. A. Adams (1975), Sobolev spaces, Academic Press.

Nguyen Manh Hung and Phung Kim Chuc (2014), "Asymptotic of solutions for second IBVP for hyperbolic systems in non-smooth domains". Vol. 93, No. 5, pp. 1010-1035. Applicable Analysis 2014.

Nguyen Manh Hung and Phung Kim Chuc (2012), "On the smoothness of the solution for the initial - Neumann problem for hyperbolic systems in Lipschitz cylinders". Vol. 16, No. 5,pp. 1629-1645,October 2012; Taiwanese Journal of Mathematics.

Nguyen Manh Hung and Nguyen Thi Kim Son (2008), " Existence and smoothness of solutions to the second initial boundary value problem for Schrödinger systems in cylinders with non-smooth base".Vol 2008. No. 35. pp.1- 11. Electronic Journal of Differential Equations.

Nguyen Manh Hung, (1998), "The first initial boundary value problem for Schrödinger systems in non-smooth domains", Diff Urav., 34 (1998), pp 1546-1556 (in Russian).

Lions, J. L. And Magenes, E; (1972) “Non-homogeneous boundary value problems and applications” Vol 1,2 Springer, 1972.