CÁC HƯỚNG ĐI TÌM NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

ThS. NGUYỄN NGỌC ĐỨC*

Giải bài tập toán không chỉ có tác dụng ôn tập, củng cố kiến thức lí thuyết mà còn để phát huy kiến thức, phát triển năng lực tư duy và rèn trí thông minh cho học sinh (HS). Việc tìm ra đáp số của bài toán chưa đủ, giáo viên cần khuyến khích HS tìm nhiều cách giải khác cho bài toán, từ đó chọn ra cách giải hay nhất, ngắn gọn nhất. Điều này sẽ tạo cho HS niềm say mê, hứng thú, từ đó sẽ giúp HS học tốt hơn môn *Toán*.

Để tìm nhiều lời giải cho một bài toán, cần phân tích bài toán dưới nhiều khía cạnh, nhiều góc độ khác nhau. Vấn đề quan trọng là cách nhìn bài toán, cách tiếp cận bài toán, khai thác hết mọi khía cạnh biểu hiện của bài toán. Nhìn bài toán dưới dạng chính quy, cơ bản, đưa bài toán về dạng điển hình. Hơn nữa, phải biết nhìn bài toán trong bối cảnh chung, kết hợp nhìn bài toán ở hoàn cảnh cụ thể trong mối tương quan với những bài toán khác.

1. Hướng thứ 1

Khi phân tích bài toán phải liên tưởng giữa các phạm vi khác nhau, liên tưởng đến từng chi tiết trong bài toán. Nhờ nghiên cứu liên tiếp từng chi tiết một, bằng nhiều cách, cuối cùng chúng ta có thể nhìn được toàn bộ vấn đề dưới một ánh sáng hoàn toàn khác trước và do đó rút ra một cách giải mới.

Ví dụ 1: Giải và biện luận phương trình:

$$\frac{x}{x-a}-\frac{2a}{x+a}=\frac{8a^2}{x^2-a^2}$$ (1) (Điều kiện $x \neq \pm a$).

Phân tích: Nhiều HS đã nhận thấy rằng: $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$. Nên chuyển phương trình về dạng cơ bản bằng phép biến đổi đại số.

(1) $\Leftrightarrow x^2 - ax - 6a^2 = 0$.

Nếu $a = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x = 0$ vô lí.

Nếu $a \neq 0$ thì ta nhận thấy ngay đây là phương trình bậc hai đơn giản.

- Cách 1:

Biệt thức $\Delta = a^2 + 24a^2 = 25a^2 > 0$ (do $a \neq 0$).

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -2a$; $x_2 = 3a$ (TM $x \neq \pm a$).

- Cách 2:

Ở góc độ khác, ta theo định lí Vi-et:

$x_1 x_2 = -6a^2 < 0$ (do $a \neq 0$). Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt và tính được nghiệm $x_1 = -2a$; $x_2 = 3a$.

- Cách 3: Có thể đưa về phương trình tích

$x^2 - ax - 6a^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2a)(x + 3a) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -2a \\ x_2 = 3a \end{array}\right.$$

- Cách 4: Có thể nghĩ đến cách giải mẫu trong SGK để đưa về phương trình:

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}a\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\dfrac{a}{2}=\dfrac{5}{2}a \\ x-\dfrac{a}{2}=-\dfrac{5}{2}a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3a \\ x=-2a \end{array}\right.$$

Như vậy, đối với một bài toán có thể đưa ra nhiều cách giải. Từ đó, HS có thể lựa chọn một phương án giải và củng cố kiến thức về giải phương trình bậc hai.

2. Hướng thứ 2

Xem xét các đặc điểm bài toán để phát hiện được một số đặc điểm cơ bản không bị hình thức rắc rối che khuất. Mỗi một bài toán có thể thuộc dạng điển hình nào đó nhưng lại có vẻ riêng biệt, đặc thù của nó. Theo quy luật triết học *"Nội dung - hình thức"*, *"bản chất - hiện tượng"*. Phải phân tích trong bài toán các đặc điểm cơ bản chung cho loại bài toán đó và các đặc điểm phụ riêng của bài toán đã cho (tính độc đáo của tư duy sáng tạo), lựa chọn các thao tác tư duy, thiết lập phương pháp giải toán.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2+2x+a \leq 0 \\ x^2-4x-5a \leq 0 \end{cases}$$

* Khoa Giáo dục trung học cơ sở, Trường Cao đẳng sư phạm Bắc Ninh

- *Cách 1*:

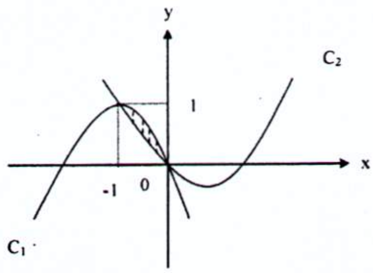
Ta có thể giải bài toán này dựa vào các bất phương trình riêng lẻ, sau đó lấy giao của hai miền nghiệm tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

- *Cách 2:*

Tuy nhiên, do tham số a không có trong các hệ số của ẩn x (đây là đặc điểm cơ bản không bị hình thức rắc rối che khuất) nên ta có thể giải bài toán này bằng phương pháp đồ thị. $\begin{cases} a \le -x^2 - 2x \\ a \ge \frac{1}{5}\left(x^2 - 4x\right) \end{cases}$

Khai thác điều này, hệ tương đương với:

Dựng đồ thị (C1) của hàm số $y = -x^2 - 2x$. Dựng đồ thị (C2) của hàm số $y = \frac{1}{5}\left(x^2 - 4x\right)$. Nghiệm của hệ là hoành độ của những điểm ở phần gạch chéo. Ta nhận thấy hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi a = 0 hoặc a = 1.



3. Hướng thứ 3

Vận dụng kiến thức tổng hợp hoặc kiến thức liên môn, thiết lập những sự liên tưởng giữa các phạm vi khác nhau để tìm nhiều cách giải cho một bài toán.

Ví dụ 3:

Biết x, y thoả mãn phương trình $36x^2 + 16y^2 = 9$ (1). Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $u = y - 2x + 5$ (2). Hãy tìm các cách giải cho bài toán trên (GV cho HS tự làm sau đó hệ thống lại).

- *Cách 1:*

Từ yêu cầu của đề bài, HS xác định hướng giải là tìm tập giá trị của hàm u từ đó tìm được giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Viết lại (2) $\Leftrightarrow y = 2x + u - 5$ (3).

Thế vào (1) có:

$100x^2 + 64(u-5) + 16(u-5)^2 - 9 = 0$ (4).

Xem (4) là phương trình đối với ẩn x. Ta có: $\Delta' = 900 - 576(u-5)^2$

Phương trình (4) có nghiệm

$\Leftrightarrow 900 - 576(u-5)^2 \ge 0$.

$\Leftrightarrow 16(u-5)^2 \le 25 \Leftrightarrow |u-5| \le \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{15}{4} \le u \le \frac{25}{4}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$u = \frac{15}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{8(u-5)}{25} = \frac{2}{5} \\ y = 2x - \frac{5}{4} = \frac{9}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = -\frac{9}{20} \end{cases}; u = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{8(u-5)}{25} = -\frac{2}{5} \\ y = 2x + \frac{5}{4} = \frac{9}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = \frac{9}{20} \end{cases}$

Do vậy Min $u = \frac{15}{4}$; Max $u = \frac{25}{4}$.

- *Cách 2:*

Một HS đã nhìn ra điều kiện $(6x)^2 + (4y)^2 = 3^2$ ở góc độ khác và sử dụng bất đẳng thức

$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right)$

Ta có $(u-5)^2 = (2x-y)^2 = \left(\frac{1}{3}6x - \frac{1}{4}4y\right)^2 \le \left(36x^2 + 16y^2\right)\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{16}\right)$ (5)

Theo (1) có $36x^2 + 16y^2 = 9$, thay vào (5) có $(u-5)^2 \le \frac{25}{16} \Leftrightarrow |u-5| \le \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{15}{4} \le u \le \frac{25}{4}$. Do vậy Min $u = \frac{15}{4}$; Max $u = \frac{25}{4}$.

- *Cách 3*:

Liên hệ đến hình học, một HS đã nhìn $6x\frac{1}{3} + 4y\frac{-1}{4}$ là biểu thức toạ độ của tích vô hướng hai véctơ.

$\vec{u} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right); \vec{v} = (6x; 4y) \Rightarrow \vec{u}\vec{v} = 2x - y; \left|\vec{u}\right| = \frac{5}{12}; \left|\vec{v}\right| = 3$

$\Rightarrow |u-5| = |2x-y| = \left|\frac{1}{3}6x - \frac{1}{4}4y\right| = \left|\vec{u}\vec{v}\right|; \left|\vec{u}\vec{v}\right| \le \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|$

Nên $\frac{15}{4} \le u \le \frac{25}{4}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $\vec{u}; \vec{v}$ cùng hướng.

$u = \frac{15}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x + 5 = \frac{25}{4} \\ \vec{u}; \vec{v} \uparrow\uparrow \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y - 8x = 5 \\ 8y + 9x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = \frac{9}{20} \end{cases}$

$u = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x + 5 = \frac{25}{4} \\ \vec{u}; \vec{v} \uparrow\uparrow \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = -\frac{9}{20} \end{cases}$

Do vậy Min $u = \frac{15}{4}$; Max $u = \frac{25}{4}$.

- *Cách 4:*

Liên tưởng đến đẳng thức quen thuộc $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ từ đó lượng giác hoá bằng cách đặt ẩn phụ.

Viết (1) $\Leftrightarrow (6x)^2 + (4y)^2 = 32$ (6). Đặt $6x = 3\cos\varphi$; $4y = 3\sin\varphi$

Khi đó (6) trở thành $9(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 9\ \forall\varphi \in R$.

$$|u-5| = \left|-\cos\varphi + \frac{3}{4}\sin\varphi\right| \Rightarrow |u-5| \le \frac{5}{4} \Rightarrow |u-5| \le \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{15}{4} \le u \le \frac{25}{4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\cos\varphi}{-1} = \frac{\sin\varphi}{3/4} \Leftrightarrow -\cos\varphi = \frac{4}{3}\sin\varphi \Leftrightarrow -2x = \frac{16}{9}y \Leftrightarrow 9x + 8y = 0$$

$$u = \frac{15}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x + 5 = \dfrac{25}{4} \\ 9x + 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y - 8x = 5 \\ 8y + 9x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{9}{20} \end{cases}$$

$$u = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x + 5 = \dfrac{25}{4} \\ 9x + 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{5} \\ y = -\dfrac{9}{20} \end{cases}$$

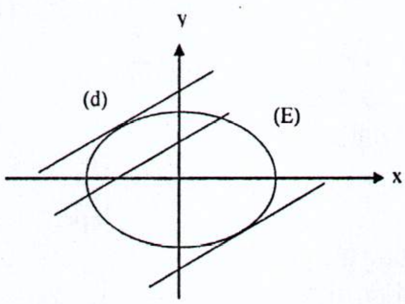
Từ các kết quả trên suy ra Minu $\frac{15}{4}$; Maxu = $\frac{25}{4}$.

- *Cách 5* (phương pháp hình học):

Tập hợp các giá trị của u là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 36x^2 + 16y^2 = 9 \\ u = y - 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{1}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{9}{16}} = 1 \\ 2x - y + u - 5 = 0 \end{cases}$$

Vẽ elip: $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{9}{16}} = 1$ và đường thẳng (d): u = y - 2x + 5 $\Leftrightarrow$ y = 2x + u - 5 đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng x0y có phương không đổi, luôn song song với đường thẳng y = 2x, cắt 0y tại điểm có tung độ là u - 5.



Từ hình vẽ, HS đã chỉ ra cực trị của u nhận được khi và chỉ khi (d) ở vị trí là các tiếp tuyến của (E), điều đó xảy ra khi:

$$\Leftrightarrow a^2A^2 + b^2B^2 = C^2 \Leftrightarrow (u-5)^2 = \frac{25}{16}$$

$$\Leftrightarrow |u-5| = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u - 5 = -\dfrac{5}{4} \\ u - 5 = \dfrac{5}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{15}{4} \\ u = \dfrac{25}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \min u = \dfrac{15}{4} \\ \max u = \dfrac{25}{4} \end{array}\right.$$

* * *

Như vậy, giải một bài toán theo nhiều cách khác nhau sẽ giúp cho HS mở rộng tầm nhìn, có những cách nhìn mới mẻ, độc đáo về cùng một bài toán, hình thành kiến thức tổng hợp. Chính điều này sẽ giúp HS học tập tốt hơn môn *Toán* và vận dụng môn học vào thực tiễn một cách linh hoạt và hiệu quả hơn.❑

Tài liệu tham khảo

1. Phan Đức Chính - Tôn Thân - Nguyễn Huy Đoan - Phạm Gia Đức - Trương Công Thành - Nguyễn Duy Thuận. **Toán 9** (tập 2). NXB *Giáo dục Việt Nam,* H. 2012.
2. Phan Đức Chính - Tôn Thân - Nguyễn Huy Đoan - Phạm Gia Đức - Trương Công Thành - Nguyễn Duy Thuận. **Bài tập Toán 9** (tập 2). NXB Giáo dục Việt Nam, H. 2013.
3. Trần Văn Hạo - Cam Duy Lễ. **Đại số 10**. NXB *Giáo dục Việt Nam,* H. 2013.
4. Trần Văn Hạo - Cam Duy Lễ. **Bài tập Đại số 10**. NXB *Giáo dục Việt Nam,* H. 2009.

SUMMARY

To find multiple solutions to a problem to analyze problems in many aspects, many different angles, the important issue is the way of looking at problems, mathematical approach, exploring all aspects of the manifestation of the problem; looking at problems in the form of basic, regular, taken of the typical form. In addition to looking at problems in common context associated with the problem in specific circumstances in correlation with the other problems.

Vận dụng thuật toán EM...

(Tiếp theo trang 84)

Tài liệu tham khảo

Torra V. - Josep Domingo Ferrer. *Record linkage methods for multi database data mining.* In V. Torra (Ed.), Information Fusion in Data Mining, (ISBN 3-540-00676-1, Springer), pp. 101-132. 2003.

SUMMARY

The use of EM (Expectation-Maximization) in teaching the Advanced Database subject helps IT students master the way to connect two saved files. Therefore, students understand its meaning and importance in doing math's exercises relating to security and saving original data from database.