BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

NGUYỄN VĂN ĐẠI

CÁC HÀM $(\cdot, W)$-CHỈNH HÌNH VÀ ÁP DỤNG

Chuyên ngành: Toán Giải Tích
Mã số chuyên ngành: 62.46.01.02

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

BÌNH ĐỊNH - NĂM 2017

Công trình được hoàn thành tại:

Trường Đại học Quy Nhơn

Người hướng dẫn khoa học:
PGS. TS. Thái Thuần Quang

Phản biện 1: GS. TSKH. Nguyễn Quang Diệu

Phản biện 2: GS. TS. Đặng Đức Trọng

Phản biện 3: PGS. TS. Đinh Huy Hoàng

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án tại
Trường Đại học Quy Nhơn vào lúc ...... giờ ...... ngày ...... tháng ...... năm 2017

Có thể tìm hiểu luận án tại thư viện:
- Thư viện Quốc gia Việt Nam
- Trung tâm thông tin tư liệu Trường Đại học Quy Nhơn

LỜI CAM ĐOAN

Luận án này được hoàn thành tại Trường Đại học Quy Nhơn, dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Thái Thuần Quang. Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả trong luận án là trung thực, được các đồng tác giả cho phép sử dụng và chưa từng được ai công bố trước đó.

Tác giả

Nguyễn Văn Đại

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn hết sức tận tình và đầy nhiệt tâm của Thầy Thái Thuần Quang. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và gia đình.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn đến Ban Giám hiệu Trường Đại học Quy Nhơn, Phòng Sau đại học, Khoa Toán cùng quý thầy cô giáo giảng dạy lớp nghiên cứu sinh Toán giải tích khóa 1 đã tận tình giúp đỡ và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt thời gian học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp gần xa đã giúp đỡ, động viên, khích lệ tác giả trong suốt quá trình làm luận án. Xin cảm ơn Liên Vương Lâm, giảng viên Trường Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi, đã nhiệt tình cùng tác giả học tập và nghiên cứu.

Cuối cùng, tác giả xin dành tình cảm đặc biệt đến gia đình, người thân và các người bạn của tác giả, những người đã luôn mong mỏi, động viên và tiếp sức cho tác giả để hoàn thành bản luận án này.

Mục lục

MỞ ĐẦU

Các hàm chỉnh hình giá trị véctơ là công cụ rất hữu ích trong việc nghiên cứu các lĩnh vực toán học khác, ví dụ như trong lý thuyết nửa nhóm một tham số hoặc trong lý thuyết phổ và các tính toán giải tích hàm. Ngay cả khi để chứng minh các định lý về các hàm chỉnh hình giá trị vô hướng, đôi lúc cũng rất hữu ích nếu ta xét các hàm với giá trị trong không gian Banach.

Trong giải tích hàm, có thể nói rằng có hai cách tiếp cận chính với tính chất giải tích của các hàm giá trị véctơ thông qua các khái niệm hàm chỉnh hình yếu và chỉnh hình, trong đó khái niệm "yếu" là dễ kiểm tra hơn nhiều trong thực hành. Ở đây, hàm $f : D \to F$ được gọi là chỉnh hình yếu nếu $u \circ f$ là chỉnh hình với mọi $u \in F'$, trong đó E, F là các không gian lồi địa phương và D là một miền (tập mở và liên thông) trong E.

Ta biết rằng, một hàm chỉnh hình là chỉnh hình yếu. Vì vậy bài toán được đặt ra một cách tự nhiên là "Khi nào tính chất chỉnh hình của hàm f được quyết định nếu nó chỉnh hình yếu?". Có thể nói người đầu tiên giải quyết bài toán này vào năm 1938 là Dunford [18]. Ông khẳng định rằng điều này xảy ra khi $D \subset \mathbb{C}$ và F là một không gian Banach. Sau đó Grothendieck [25] mở rộng kết quả này khi F là tựa đầy đủ. Trong thực tế, điều này cũng đúng khi E và F là các không gian Hausdorff và E là khả mêtric [48, Théorème 1.2.10].

Như vậy, trong các trường hợp trên, nói chung người ta không kiểm tra tính chỉnh hình của một hàm giá trị véctơ bằng việc kiểm tra các tính chất của định nghĩa, mà sẽ thuận lợi hơn nếu ta tiến hành kiểm tra thông qua tính chỉnh hình yếu.

Tuy nhiên, người ta cảm nhận rằng có thể làm bé hơn tập thử F' cho tính chất chỉnh hình của hàm f. Khi đó một câu hỏi quan trọng được đặt ra là "xác định tập thử nhỏ nhất $W \subset F'$" sao cho vẫn đủ để kiểm tra tính chất chỉnh hình của f. Vì vậy một số khái niệm chỉnh hình yếu khác (yếu hơn khái niệm truyền thống) được đề xuất và nhận được sự quan tâm nghiên cứu rất gần đây. Đó là hàm (F, W)-chỉnh hình, theo nghĩa, $u \circ f$ là chỉnh hình với mọi $u \in W \subset F'$. Chính vì thế, gần đây một số tác giả đã gọi là hàm chỉnh hình "rất yếu" thay cho tên gọi "yếu" thông thường nhằm phân biệt với các khái niệm yếu mới xuất hiện.

Để trả lời câu hỏi đó, trong hơn thập niên gần đây, hai bài toán sau dành được sự quan tâm đặc biệt của nhiều nhóm nghiên cứu trên thế giới.

Bài toán 1. *Tìm kiếm các lớp $\mathscr{F}$ các hàm (F, W)-chỉnh hình trên $D \subset E$ với giá trị trong F và các điều kiện của các không gian lồi địa phương E, F, các tập xác định $D \subset E$, các tập thử $W \subset F'$ sao cho mọi $f \in \mathscr{F}$ đều chỉnh hình.*

Bài toán 2. *Tìm kiếm các lớp $\mathscr{F}$ các hàm $f : M \to F$ và các điều kiện của các không gian lồi địa phương E, F, các tập xác định $M \subset E$, các tập thử $W \subset F'$ sao cho nếu $u \circ f$ có một thác triển chỉnh hình đến một lân cận D nào đó của M thì f có thể thác triển (duy nhất) chỉnh hình trên D với mọi $f \in \mathscr{F}$.*

Kết quả sớm nhất của Bài toán 1 có thể tìm thấy trong [40, p. 139] cho trường hợp $D \subset \mathbb{C}$, F Banach, W xác định chuẩn và $\mathscr{F}$ là lớp hàm bị chặn địa phương (cũng xem [8, Theorem 1.3]). Nó là một hệ quả trực tiếp của công thức tích phân Cauchy. Sau đó, trong luận án Tiến sĩ của mình, Grosse-Erdmann [23] đã mở rộng kết quả trên cho trường hợp W tách điểm F nhưng với một chứng minh khá phức tạp.

Năm 2000, trong [8] Arendt và Nikolski đã cải thiện chứng minh của Grosse-Erdmann bằng cách sử dụng các định lý Vitali. Thậm chí họ còn khẳng định rằng kết quả trên đúng cho trường hợp F là không gian Fréchet. Cũng trong công trình này, các tác giả cũng chỉ ra rằng, nếu W không xác định tính bị chặn thì kết luận này không còn đúng nữa [8, Theorem 1.5]. Ở đây chú ý rằng, nếu W xác định tính bị chặn thì nó xác định chuẩn. Tính chất bị chặn địa phương của lớp hàm $\mathscr{F}$ cũng được chứng minh là không thể bỏ qua. Tuy nhiên, cũng trong [8], Arendt và Nikolski đã chứng tỏ rằng, trong trường hợp này nếu W là không gian con hầu xác định chuẩn thì $f \in \mathscr{F}$ sẽ chỉnh hình nhưng chỉ trên một tập con trù mật D_0 nào đó của D [8, Theorem 1.8].

Sau đó, vào năm 2004, Grosse-Erdmann đã đạt được kết quả tổng quát của Bài toán 1 với D là một miền trong không gian E lồi địa phương, F là đầy đủ địa phương, $\mathscr{F}$ là lớp các hàm bị chặn khuếch đại và W là tách điểm [24, Theorem 3].

Từ kết quả nói trên, trong [23] Grosse-Erdmann dễ dàng giải quyết Bài toán 2 cho trường hợp $M = D\backslash K$, với K là tập compact trong miền D của $\mathbb{C}$, và sự thác triển là duy nhất [23, Theorem 5.2]. Năm 2004, tác giả này đã giải quyết bài toán trên cho tập M nhỏ hơn so với kết quả trước. Ở đây tập M được giả thiết là xác định hội tụ đều địa phương trong $H(D)$ với D là một miền trong $\mathbb{C}^n$ và $\mathscr{F}$ là lớp các hàm bị chặn trên $M \cap K$ với mọi tập compact $K \subset D$ [24, Theorem 2].

Trong công trình [8], Arendt và Nikolski cũng quan tâm đến Bài toán 2 cho trường hợp M là một tập con có điểm giới hạn trong miền $D \subset \mathbb{C}$ và lớp hàm $\mathscr{F}$ là tùy ý, còn W là một không gian con đóng, hầu xác định chuẩn của F' [8, Theorem 3.5].

Hầu hết các tác giả kể trên đều sử dụng công cụ thuần túy giải tích phức, cụ thể là hàm chỉnh hình nhiều biến giá trị véctơ và một ít công cụ của không gian véctơ tôpô.

Vào năm 2007, Bonet, Frerick và Jordá [14, 21], thông qua công cụ giải tích hàm, lý thuyết bó và nhờ kỹ thuật tuyến tính hóa không gian các hàm chỉnh hình, đã giải quyết Bài toán 2 cho nhiều trường hợp hơn. Các tác giả này đã chứng minh được các kết quả tổng quát sau:

- Nếu $\mathscr{F}$ là một bó con đóng của lớp $\mathscr{C}^\infty$ các hàm khả vi vô hạn trên một miền $D \subseteq \mathbb{R}^n$, M là một tập duy nhất đối với $\mathscr{F}(D)$, và $W \subset F'$ là một không gian con xác định tính bị chặn, F đầy đủ địa phương thì ánh xạ hạn chế $R_{M,W} : \mathscr{F}(D, F) \to \mathscr{F}_G(M, F)$ là toàn ánh [14, Theorem 9].

- Nếu $M \subseteq D \times \mathbb{N}_0^n$ xác định tôpô trong $\mathscr{F}(D)$ và $W \subseteq F'$ là tách điểm, thì ánh xạ hạn chế $R_{M,W} : \mathscr{F}(\Omega, E) \to \mathscr{F}_W(M, F)_{lb}$ là toàn ánh trong hai trường hợp sau: hoặc F là một không gian B_r-đầy đủ [14, Theorem 17]; hoặc F là đầy đủ địa phương và W là trù mật mạnh [21, Theorem 1 and Theorem 3].

Gần đây, vào năm 2009, trong [22], Frerick, Jordá và Wengenroth cũng dùng kỹ thuật nói trên đã giải quyết Bài toán 2 cho M là các tập gầy và tập béo với một số lớp hàm nhận giá trị trong không gian đầy đủ địa phương. Cụ thể, các tác giả này khẳng định rằng sự thác triển là duy nhất đến một hàm chỉnh hình bị chặn trên D trong các trường hợp:

- $D \subset \mathbb{C}^n$, $M \subset D$ là một tập duy nhất đối với $H^\infty(D)$, F là không gian đầy đủ địa phương và $W \subset F'$ là một không gian con mà xác định tính bị chặn trong F [22, Theorem 2.2].
- M là một tập mẫu của $H^\infty(D)$, F là không gian đầy đủ địa phương, W là một không gian con $\sigma(F', F)$-trù mật của F' và $\mathscr{F}$ là lớp các hàm bị chặn trên M [22, Theorem 3.2].

Theo dòng nghiên cứu này, chúng tôi quan tâm đến việc khảo sát các bài toán trên một cách tổng quát hơn so với các tác giả trước, trong trường hợp không gian có bất biến tôpô tuyến tính. Đồng thời chúng tôi cũng quan tâm đến hàm chỉnh hình phân biệt, các định lý dạng Hartogs, các định lý chữ thập cho lớp hàm trên không gian Fréchet, lớp hàm $(\cdot, W)$-chỉnh hình phân biệt. Bài toán tìm các điều kiện để đảm bảo cho một hàm chỉnh hình phân biệt (tức là chỉnh hình theo từng biến) là chỉnh hình đã được đặt ra từ cuối thế kỷ 19 và cho đến nay vẫn còn nhận được sự quan tâm của nhiều nhà toán học. Có thể tạm chia lịch sử phát triển của bài toán này thành 4 giai đoạn chính.

Trong giai đoạn từ năm 1899 đến năm 1967, nhiều kết quả đặc biệt quan trọng đạt được về vấn đề này bởi các nhà toán học nổi tiếng như Osgood (1899), Hartogs (1906) và Hukuhara (1930) cho trường hợp hàm 2 biến trên tích Descartes (hình chữ nhật). Cuối giai đoạn này, Shimoda (1957) và Terada (1967) đưa ra một số kết quả cho trường hợp một trong hai "cạnh" của hình chữ nhật là có điểm tụ hoặc là không đa cực.

Ở giai đoạn từ năm 1968 đến năm 1997, người ta quan tâm đến việc tìm các kết quả tương tự như Định lý Hartogs cho các hàm giải tích thực trên các tập chữ thập nhưng cũng chỉ cho trường hợp hàm 2 biến. Một số nhà toán học tiêu biểu cho hướng nghiên cứu này phải kể đến Siciak, Zaharjuta, Nguyễn Thanh Vân và Zeriahi.

Giai đoạn từ năm 1998 đến năm 2001, các kết quả nghiên cứu chủ yếu là các định lý chữ thập có kỳ dị giải tích. Định lý tổng quát nhất cho trường hợp 2 biến là của Alehyane và Zeriahi [1, Théorème 2.2.1]. Người ta gọi kết quả này là Định lý chữ thập cổ điển. Ta dễ nhận thấy rằng có thể thiết lập định lý này một cách tổng quát hơn cho trường hợp $n > 2$ biến, cho không gian giải tích phức và các đa tạp Stein. Với trường hợp có kỳ dị giải tích phải kể đến các kết quả của Öktem. Sau đó chúng được Siciak tổng quát hóa cho trường hợp kỳ dị trên các tập đại số [69]. Một số kết quả tổng quát về bài toán này thuộc về Jarnicki và Pflug được công bố trong các năm 2000, 2001.

Giai đoạn từ năm 2001 đến nay, người ta quan tâm đến các định lý chữ thập có kỳ dị tổng quát hơn. Bài toán hiện đang được quan tâm giải quyết với kỳ dị đa cực, kỳ dị đa chính quy, ... và đang xem xét cho các lớp hàm với giá trị trên các đa tạp và trên các không gian phức. Nhiều kết quả đã đạt được có thể xem trong các công trình của Jarnicki, Pflug và Nguyễn Việt Anh.

Mục đích của luận án là giải quyết hai Bài toán 1 và 2 cho trường hợp tổng quát, cụ thể là thay việc xem xét D là tập con của $\mathbb{C}^n$ bởi D là tập con của một không gian Fréchet hoặc đối ngẫu Fréchet nào đó, mở rộng các Định lý Hartogs và Định lý chữ thập cho các hàm $(\cdot, W)$-chỉnh hình phân biệt và tìm kiếm một số áp dụng của kết quả nghiên cứu.

Giải tích hàm, Giải tích phức, Lý thuyết thế vị phức, ... là các công cụ chính mà chúng tôi sẽ sử dụng trong luận án này.

Luận án, ngoài phần mở đầu và kết luận, gồm có 4 chương và 86 tài liệu tham khảo.

Tính bị chặn địa phương của hàm đóng vai trò quan trọng trong bài toán chỉnh hình yếu và thác triển chỉnh hình. Trong phần đầu của chương 1, chúng tôi quan tâm đến tính bị chặn địa phương của các hàm chỉnh hình giữa các không gian Fréchet với các bất biến tôpô tuyến tính. Cụ thể chúng tôi chứng minh được đẳng thức

$$H_{LB}(D, F) = H(D, F) \tag{HLB}$$

với mọi tập mở D trong E, khi $E \in (\Omega)$ (tương ứng $(\widetilde{\Omega})$) và $F \in (LB_\infty)$ (tương ứng (DN)), trong đó E, F là các không gian Fréchet (Định lý 1.3.2). Định lý này là mở rộng thực sự các kết quả của Vogt phát biểu cho các ánh xạ tuyến tính liên tục [82, Satz 2.1, Satz 3.2, Satz 6.1, Satz 6.2].

Ở phần tiếp theo của chương, chúng tôi nghiên cứu một số vấn đề về hàm $\sigma(F, W)$-chỉnh hình. Trong [28] Hải đã mở rộng kết quả của Arendt và Nikolski với hàm f xác định trên một tập con mở D trong không gian Fréchet-Schwartz $E \in (\Omega)$ nhận giá trị trong không gian Fréchet-Schwartz $F \in (LB_\infty)$ hoặc $D \subset \mathbb{C}$ nhận giá trị trong không gian Fréchet $F \in (LB_\infty)$ và trong cả hai trường hợp trên kết quả có được là hàm f chỉnh hình trên một tập con mở trù mật của D [28, Theorem 4.1, Theorem 4.2]. Với điều kiện chúng tôi thêm vào "*bị chặn trên các tập bị chặn*" của hàm f thì kết luận "*chỉnh hình trên một tập con mở trù mật của D*" được thay bằng "*chỉnh hình trên D*" (Định lý 1.4.6). Chú ý rằng, trong một số trường hợp (chẳng hạn, khi E là không gian Fréchet-Montel), tính "bị chặn trên các tập bị chặn" của hàm f là yếu hơn so với tính "bị chặn địa phương" của hàm f. Nhờ vào một kết quả của Hải [28, Example 5.1] ta có thể chỉ ra rằng Định lý 1.4.6 không đúng đối với các hàm giải tích thực nhận giá trị Banach và vì vậy nói chung nó cũng không đúng đối với các hàm giải tích thực nhận giá trị Fréchet tổng quát. Cuối cùng, từ Bổ đề 1.4.7 chúng tôi nhận được trực tiếp kết quả cho trường hợp $E = \mathbb{C}^n$ (Định lý 1.4.8).

Dựa vào các kết quả nghiên cứu của chương 1, chúng tôi sẽ khảo sát ở chương 2 bài toán thác triển chỉnh hình từ các tập đặc biệt. Dựa vào ý tưởng của Meise và Vogt [46, Theorem 3.3, Theorem 3.9], chúng tôi đã xét bài toán này trong trường hợp tổng quát hơn, đó là thác triển từ bao tuyến tính của một tập bị chặn (Định lý 2.1.2 và Định lý 2.1.3), thác triển từ tập con compact không đa cực (Định lý 2.2.3 và Định lý 2.2.4). Các kết quả này là sự tổng quát hóa kết quả của Frerick, Jordá và Wengenroth [22, Theorem 2.2]. Từ tính chất kế thừa qua các không gian con của tính chất (DN), như trong [22] chúng tôi nhận được kết quả về tính duy nhất (Hệ quả 2.2.5). Hệ quả này khẳng định rằng, không gian con đóng nhỏ nhất chứa ảnh của một tập compact không đa cực qua ánh xạ chỉnh hình bị chặn cũng chính là không gian miền giá trị nhỏ nhất của ánh xạ đó.

Trong chương 3 chúng tôi nghiên cứu sự thác triển chỉnh hình của các hàm (F, W)-chỉnh hình phân biệt từ một tích của tập con $\widetilde{L}$-chính quy compact trong không gian Stein với một không gian Stein đến một lân cận nào đó của nó (Định lý 3.2.6) và của các hàm (F, W)-chỉnh hình bị chặn với các tập con compact không đa cực trên một tập chữ thập trong $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$, trong đó F là không gian Fréchet và $W \subset F'$ là một không gian con xác định tính bị chặn trong F (Định lý 3.3.1). Từ Định lý 3.3.1 chúng tôi cũng suy ra được rằng thớ theo từng thành phần của tập kỳ dị của hàm f là các tập đa cực (Mệnh đề 3.3.2). Nếu ta thay F trong Định lý 3.3.1 là không gian đầy đủ địa phương và điều kiện yếu hơn cho các họ $\{u \circ f_z\}_{u \in W}$, $\{u \circ f^w\}_{u \in W}$ thì ta nhận được thác triển chỉnh hình của hàm f trên một tập có kỳ dị (Định lý 3.3.3). Một số kết quả về hàm $(\cdot, W)$-chỉnh hình với kỳ dị đa chính quy cũng nhận được từ Định lý trên như là các hệ quả. Chú ý rằng tính đa chính quy là mạnh hơn tính không đa cực. Vì vậy nếu ta thay giả thiết "không đa cực" của E và G trong Định lý 3.3.1 bởi điều kiện mạnh hơn "đa chính quy" và điều kiện tăng thêm cho các họ $\{u \circ f_z\}_{u \in W}$, $\{u \circ f^w\}_{u \in W}$ thì ta nhận được thác triển chỉnh hình không có kỳ dị của hàm f (Định lý 3.3.6). Ý tưởng chính của phép chứng minh các định lý này là sử dụng kết quả gần đây của Frerick, Jordá và Wengenroth ([22], Theorem 2.2).

Trong chương 4 chúng tôi nêu một số áp dụng của các kết quả đạt được trong các chương trước vào việc giải quyết Bài toán Wrobel và chứng minh một số định lý về hội tụ kiểu Vitali. Wrobel đã đặt ra bài toán: Cho $D \subset \mathbb{C}$ là một miền, F là một không gian Banach và $f : D \to F$ là hàm bị chặn địa phương. Hàm f có chỉnh hình hay không nếu tồn tại một không gian lồi địa phương Y và một đơn ánh tuyến tính liên tục $j : F \to Y$ sao cho $j \circ f$ là chỉnh hình? Sử dụng các Định lý 1.4.6, 1.4.8, chúng tôi nhận được kết quả tổng quát hơn của bài toán Wrobel (Định lý 4.1.1). Phần tiếp theo chúng tôi cũng chứng minh được các định lý kiểu Vitali đối với dãy các hàm chỉnh hình bị chặn địa phương trên một miền trong không gian Fréchet với giá trị trong không gian Fréchet (Định lý 4.2.4). Ý tưởng chính của định lý này xuất phát từ định lý Vitali cổ điển nói rằng hãy tìm các điều kiện để có thể đảm bảo dãy các hàm chỉnh hình mà nó hội tụ trên một tập con của miền D hội tụ trên toàn miền D. Kết quả này là mở rộng kết quả của Arendt và Nikolski (Định lý 4.2.3). Trong phần cuối của chương này, chúng tôi trình bày các định lý kiểu Vitali đối với dãy các hàm chỉnh hình giữa các không gian Fréchet-Schwartz có bất biến tôpô tuyến tính (Định lý 4.2.5).

Luận án được viết dựa trên các công trình [61–63]. Các kết quả của luận án được báo cáo tại:

- Seminar Khoa Toán, Trường Đại học Quy Nhơn;
- Hội nghị Toán học phối hợp Việt-Pháp tại Huế, 20-24/08/2012;
- Hội thảo Toán học Châu Á, 2013 tại Busan, Korea, 30/06-04/07/2013;
- Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ 8 tại Nha Trang, 10-14/08/2013;
- Hội nghị Toán học Miền Trung-Tây Nguyên tại Quy Nhơn, 12-14/08/2015.

Chương 1

TÍNH CHỈNH HÌNH CỦA HÀM $(\cdot, W)$-CHỈNH HÌNH

Các kết quả mới của chương này được trích ra từ công trình [61].

1.1 Một vài khái niệm

Định nghĩa 1.1.1 ([56])**.** Cho $A = (a_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}$ là một ma trận Köthe thỏa mãn các điều kiện:

(i) $0 \leqslant a_{j,k} \leqslant a_{j,k+1}, \quad \forall j, k \in \mathbb{N}$;

(ii) $\forall\, j \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : a_{j,k} > 0$.

Khi đó ta ký hiệu $\lambda(A)$ là không gian dãy

$$\lambda(A) = \Big\{x = (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \|x\|_k = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| a_{j,k} < +\infty \text{ với mọi } k \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Rõ ràng $\lambda(A)$ là một không gian Fréchet với tôpô lồi địa phương cảm sinh bởi hệ nửa chuẩn $\{\|\cdot\|_k\}$.

Định nghĩa 1.1.2 ([56])**.** Nếu ma trận $A = (a_{j,k}) = (r_k^{\alpha_j})$ thỏa mãn

(i) $0 < \alpha_j \leqslant \alpha_{j+1}, \lim\limits_{j\to+\infty} \alpha_j = +\infty$;

(ii) $0 < r_k < r_{k+1}, \lim\limits_{k\to+\infty} r_k = r,\ 0 < r \leqslant +\infty$,

thì không gian

$$\Lambda_r(\alpha) = \Big\{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \|x\|_k = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| r_k^{\alpha_j} < +\infty \text{ với mọi } k \in \mathbb{N}\Big\}$$

được gọi là *không gian các chuỗi lũy thừa.*

Nếu r hữu hạn thì $\Lambda_r(\alpha)$ được gọi là *không gian các chuỗi lũy thừa loại hữu hạn.*

Nếu $r = \infty$ thì $\Lambda_\infty(\alpha)$ được gọi là *không gian các chuỗi lũy thừa loại vô hạn.*

Định nghĩa 1.1.3 ([82])**.** Cho E là không gian Fréchet với tôpô xác định bởi họ tăng các nửa chuẩn $\{\|\cdot\|_k\}$. Ta nói E có tính chất

$$
\begin{aligned}
(\Omega) &: \text{nếu } \forall p\ \exists q\ \forall k,\ \exists d, C > 0 \text{ sao cho} \\
&\qquad \|\cdot\|_q^{*1+d} \leqslant C\|\cdot\|_k^*\|\cdot\|_p^{*d}; \\
(LB^\infty) &: \text{nếu } \forall \varrho_k \uparrow \infty, \forall p\, \exists q\, \forall k_0\, \exists \widehat{k}, C_{k_0}, \forall u \in E', \exists k : k_0 \leqslant k \leqslant \widehat{k} \text{ sao cho} \\
&\qquad \|u\|_q^{*1+\varrho_k} \leqslant C_{k_0}\|u\|_k^*\|u\|_p^{*\varrho_k}; \\
(\widetilde{\Omega}) &: \text{nếu } \forall\ p\ \exists\ q\ d > 0\ \forall\ k\ \exists\ C > 0 \text{ sao cho} \\
&\qquad \|\cdot\|_q^{*1+d} \leqslant C\|\cdot\|_k^*\|\cdot\|_p^{*d}; \\
(\overline{\Omega}) &: \text{nếu } \exists d > 0\ \forall p\ \exists q\ \forall k\ \exists C > 0 \text{ sao cho} \\
&\qquad \|\cdot\|_q^{*1+d} \leqslant C\|\cdot\|_k^*\|\cdot\|_p^{*d}; \\
(\overline{\overline{\Omega}}) &: \text{nếu } \forall p\ \exists q\ \forall k,\ d > 0\ \exists C > 0 \text{ sao cho} \\
&\qquad \|\cdot\|_q^{*1+d} \leqslant C\|\cdot\|_k^*\|\cdot\|_p^{*d}.
\end{aligned}
$$

Rõ ràng các tính chất này được kế thừa qua không gian thương và

$$(\overline{\overline{\Omega}}) \Rightarrow (\overline{\Omega}) \Rightarrow (\widetilde{\Omega}) \Rightarrow (LB^\infty) \Rightarrow (\Omega).$$

Định nghĩa 1.1.4 ([46])**.** Cho E là không gian Fréchet với tôpô xác định bởi họ tăng các nửa chuẩn $\{\|\cdot\|_k\}$. Giả sử $B \in \mathcal{B}(E)$. Ta nói E có tính chất

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\Omega}_B) &: \text{nếu } \forall\ p\ \exists\ q, d, C > 0 \text{ sao cho} \\
&\qquad \|\cdot\|_q^{*1+d} \leqslant C\|\cdot\|_B^*\|\cdot\|_p^{*d}; \\
(\Omega_B) &: \text{nếu } \exists\ \{d_n\} \uparrow +\infty, \forall p\ \exists q\ \exists k_o\ \forall k \geqslant k_o\ \exists C(k) > 0 \text{ sao cho } \forall u \in E' \\
&\qquad \|u\|_q^{*1+d_k} \leqslant C(k)\|u\|_B^*\|u\|_p^{*d_k}.
\end{aligned}
$$

Định nghĩa 1.1.5 ([82])**.** Cho E là không gian Fréchet với tôpô xác định bởi họ tăng các nửa chuẩn $\{\|\cdot\|_k\}$. Ta nói E có tính chất

$$
\begin{aligned}
(LB_\infty) &: \text{nếu } \forall d_n \uparrow \infty, \exists p\ \forall q\ \exists k_q \geqslant q, C_q > 0, \forall x \in E, \exists m : q \leqslant m \leqslant k_q \text{ sao cho} \\
&\qquad \|x\|_q^{1+d_m} \leqslant C_q\|x\|_m\|x\|_p^{d_m}; \\
(DN) &: \text{nếu } \exists p\ \exists d > 0\ \forall q\ \exists k,\ C > 0 \text{ sao cho} \\
&\qquad \|\cdot\|_q^{1+d} \leqslant C\|\cdot\|_k\|\cdot\|_p^{d}; \\
(\underline{DN}) &: \text{nếu } \exists p\ \forall q\ \exists k,\ d,\ C > 0 \text{ sao cho} \\
&\qquad \|\cdot\|_q^{1+d} \leqslant C\|\cdot\|_k\|\cdot\|_p^{d}.
\end{aligned}
$$

Dễ thấy các tính chất này được kế thừa qua không gian con và

$$(LB_\infty) \Rightarrow (DN) \Rightarrow (\underline{DN}).$$

Chú ý rằng trong [85] Zahariuta đã đưa ra một dạng tương đương của tính chất (DN) như sau

$$\exists p\ \forall q, d > 0\ \exists k, C > 0 \quad \text{sao cho} \quad \|\cdot\|_q^{1+d} \leqslant C\|\cdot\|_k\|\cdot\|_p^{d}. \tag{DN_Z}$$

Các bất biến tôpô tuyến tính trên được Vogt giới thiệu và nghiên cứu trong các công trình [78–82]. Ở đây, khi E có tính chất (Ω), $(\overline{\Omega}), (LB_\infty), (DN)$, ... ta viết $E \in (\Omega)$, $E \in (\overline{\Omega}), E \in (LB_\infty), E \in (DN)$, ...

Định nghĩa 1.1.6 ([16]). Một tập con U của không gian véctơ E (trên trường phức) được gọi là *mở hữu hạn* nếu $U \cap F$ là mở theo tôpô Euclide của F với mọi không gian con hữu hạn chiều F của E.

Giả sử D là tập con mở hữu hạn của không gian véctơ E và F là không gian lồi địa phương. Hàm $f : D \to F$ được gọi là *hàm chỉnh hình Gâteaux* hay *G-chỉnh hình* nếu với mỗi $a \in D, b \in E$ và $u \in F'$ hàm giá trị phức của một biến số phức

$$\lambda \longmapsto u \circ f(a + \lambda b)$$

là chỉnh hình trên lân cận của $0 \in \mathbb{C}$.

Ký hiệu $H_G(D, F)$ là tập tất cả các hàm G-chỉnh hình trên D nhận giá trị trong F. Khi $F = \mathbb{C}$, để đơn giản ta thay $H_G(D, \mathbb{C})$ bởi $H_G(D)$.

Định nghĩa 1.1.7 ([16]). Cho E và F là các không gian lồi địa phương và $\varnothing \neq D \subset E$ là mở. Hàm $f : D \to F$ được gọi là *hàm chỉnh hình* nếu f liên tục và $u \circ f$ là hàm chỉnh hình Gâteaux với mọi $u \in F'$.

Ký hiệu $H(D, F)$ là không gian véctơ của tất cả các hàm chỉnh hình trên D nhận giá trị trong F. Khi $F = \mathbb{C}$, để đơn giản ta thay $H(D, \mathbb{C})$ bởi $H(D)$. Tôpô mở compact trên $H(D, F)$ được ký hiệu là τ_o.

Không gian của tất cả các hàm chỉnh hình đi từ E vào F mà bị chặn trên các tập bị chặn trong E được ký hiệu là $H_b(E, F)$, không gian này được trang bị tôpô τ_b hội tụ đều trên các tập bị chặn. Ký hiệu $H^\infty(D, F)$ là không gian con của tất cả các hàm bị chặn trong $H(D, F)$. Để đơn giản ta thay $H^\infty(D, \mathbb{C})$ bởi $H^\infty(D)$.

Định nghĩa 1.1.8 ([16]). Giả sử K là một tập con compact trong E. Ký hiệu $H(K)$ là không gian các mầm các hàm chỉnh hình trên K, được trang bị với tôpô giới hạn quy nạp

$$H(K) = \lim_{U \searrow K} \operatorname{ind} H^\infty(U),$$

trong đó U chạy trên tất cả các lân cận của K trong E.

Ký hiệu $\Omega(f) = \{z \in D : f \text{ chỉnh hình tại } z\}$. Khi đó $S(f) := D \backslash \Omega(f)$ được gọi là tập kỳ dị của f.

Định nghĩa 1.1.9 ([20]). Cho E là không gian lồi địa phương, $\Omega \subset E$ là tập con mở, $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ là hàm nửa liên tục trên. Hàm u được gọi là *đa điều hòa dưới* trên Ω nếu u là hàm điều hòa dưới trên mọi đường thẳng phức trong Ω.

Tập hợp tất cả các hàm đa điều hòa dưới trên Ω, ký hiệu là $PSH(\Omega)$.

Định nghĩa 1.1.11 ([20]). Cho X là đa tạp phức, $u : X \to [-\infty, +\infty)$ là hàm nửa liên tục trên. Hàm u được gọi là *đa điều hòa dưới* trên X nếu $u \circ f$ là hàm điều hòa dưới trên Δ với mọi ánh xạ chỉnh hình $f : \overline{\Delta} \to X$ trên đĩa $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Định nghĩa 1.1.12 ([16]). Cho D là tập con mở của không gian lồi địa phương E. Tập $B \subset D$ được gọi là *tập cực* nếu tồn tại một hàm đa điều hòa dưới v trên $D, v \neq -\infty$ sao cho $B \subset \{x \in D : v(x) = -\infty\}$.

Định nghĩa 1.1.13 ([43]). Giả sử $K \subset \Omega$ với Ω là một tập mở trong không gian phức X. Đặt

$$\mathscr{U}(K, \Omega) = \{u \in PSH(\Omega) : \ u \leqslant 1, \ u\big|_K \leqslant 0\}.$$

Khi đó $u_{K,\Omega}(z) = \sup\{u(z) : \ u \in \mathscr{U}(K, \Omega)\}$ được gọi là hàm cực trị tương đối của cặp (K, Ω) và $\omega(\cdot, K, \Omega) := u^*_{K,\Omega}$ cho bởi

$$u^*_{K,\Omega}(z) = \omega(z, K, \Omega) = \limsup_{\Omega \ni z' \to z} u_{K,\Omega}(z'), \ z \in \Omega$$

được gọi là hàm chính quy hóa nửa liên tục trên của $u_{K,\Omega}$.

Định nghĩa 1.1.14 ([86]). Điểm $a \in \Omega$ được gọi là *điểm đa chính quy địa phương* (hay L-chính quy địa phương) của K nếu $a \in \overline{K}$ và $\omega(a, K, U) = 0$ với mọi lân cận U của a trong Ω. Hơn nữa, K được gọi là đa chính quy địa phương (hay L-chính quy địa phương) nếu nó đa chính quy địa phương tại mọi điểm $a \in K$.

Ký hiệu K^* là tập tất cả các điểm đa chính quy của K (trong Ω). Trong [10] Bedford và Taylor đã chứng minh được kết quả sau:

Định lý 1.1.15 ([10]). *Nếu K là không đa cực thì K^* là không đa cực và $K \backslash K^*$ là đa cực.*

Định nghĩa 1.1.16 ([86]). Tập K được gọi là *đa chính quy* (hoặc L-chính quy) nếu $\omega(\cdot, K \cap U, U) = 0$ trên K với mọi lân cận U của K.

Định nghĩa 1.1.17 ([86]). Tập K được gọi là *$\widetilde{L}$-chính quy* nếu $\omega(\cdot, K \cap U, U) < 1$ trên K với mọi lân cận U của K.

1.2 Một số đặc trưng mới của tính chất (Ω)

Mục này sẽ đưa ra một số đặc trưng mới của tính chất (Ω).

Mệnh đề 1.2.1. *Cho E là không gian Fréchet. Khi đó $E \in (\Omega)$ nếu và chỉ nếu $E \in (\Omega^\infty)$, có nghĩa là*

$$\exists \ \{d_n\} \uparrow +\infty, \ \forall \ p \ \exists \ q \ \exists \ k_o \ \forall k \geqslant k_o \ \exists \ C(k) > 0 \ \textit{ sao cho } \ \forall \ u \in E' :$$

$$\|u\|_q^{*1+d_k} \leqslant C(k) \|u\|_k^* \|u\|_p^{*d_k}.$$

Từ mệnh đề này, bằng cách lập luận như trong phép chứng minh của Vogt [80] chúng ta nhận được các điều kiện tương đương của (Ω).

Mệnh đề 1.2.2. *Cho E là một không gian Fréchet. Khi đó $E \in (\Omega_B)$ nếu và chỉ nếu $\exists \{d_n\} \uparrow +\infty$, $\forall p \, \exists q \, \exists k_o \, \forall k \geqslant k_o \, \exists C(k) > 0$ sao cho*

$$U_q \subset r^{d_k} B + \frac{C(k)}{r} U_p \quad \text{với mọi } r > 0.$$

Mệnh đề 1.2.3. *Cho E là một không gian Fréchet. Khi đó $E \in (\Omega)$ nếu và chỉ nếu tồn tại $B \in \mathcal{B}(E)$ sao cho $E \in (\Omega_B)$.*

Chú ý. Nếu E là Fréchet-Schwartz thì tập B có thể được chọn trong $\mathcal{K}(E)$ (xem [17]).

1.3 Hàm chỉnh hình bị chặn địa phương

Tính bị chặn địa phương của hàm đóng vai trò quan trọng trong bài toán chỉnh hình yếu và thác triển chỉnh hình. Kết quả chính của phần này là thiết lập tính bị chặn địa phương của các hàm chỉnh hình giữa các không gian Fréchet với các bất biến tôpô tuyến tính.

Trong [82] Vogt đã chứng minh được rằng một không gian Fréchet $F \in (LB_\infty)$ nếu và chỉ nếu

$$L(\Lambda_\infty(\alpha), F) = LB(\Lambda_\infty(\alpha), F), \tag{LB}$$

trong đó $L(E, F)$ không gian các ánh xạ tuyến tính liên tục giữa các không gian lồi địa phương E, F và $LB(E, F)$ là tập hợp tất cả $A \in L(E, F)$ mà tồn tại lân cận U của 0 trong E sao cho $A(U)$ là bị chặn. Chú ý rằng $\Lambda_\infty(\alpha) \in (\Omega)$ với mọi α.

Chúng tôi muốn mở rộng tính chất (LB) cho không gian các hàm chỉnh hình.

Định nghĩa 1.3.1 ([15])**.** Một hàm chỉnh hình $f \in H(D, F)$ được gọi là *bị chặn địa phương* trên D nếu với mọi $z \in D$ tồn tại một lân cận U_z của z sao cho $f(U_z)$ là bị chặn trong F.

Đặt $H_{LB}(D, F) = \big\{ f \in H(D, F) : f \text{ bị chặn địa phương trên } D \big\}$.
Vấn đề được đặt ra ở đây là tìm các điều kiện của E và F sao cho

$$H_{LB}(D, F) = H(D, F) \tag{HLB}$$

với mọi tập mở D trong E.

Định lý sau là một phiên bản chỉnh hình của (LB) nhưng với các không gian thuộc các lớp tổng quát có các bất biến tôpô tuyến tính.

Định lý 1.3.2. *Cho E, F là các không gian Fréchet. Giả sử E có một cơ sở tuyệt đối. Khi đó, đẳng thức (HLB) xảy ra với mọi tập mở D trong E nếu một trong hai điều kiện sau thỏa mãn:*

(i) $E \in (\Omega), F \in (LB_\infty)$;

(ii) $E \in (\widetilde{\Omega}), F \in (DN)$.

1.4 Các hàm $\sigma(\cdot, W)$-chỉnh hình

Định nghĩa 1.4.1 ([28]). Cho E, F là các không gian lồi địa phương, D là tập mở trong E và W là tập con của F'. Hàm $f : D \to [F, \sigma(F, W)]$ được gọi là $\sigma(F, W)$-*chỉnh hình* nếu $u \circ f$ là hàm chỉnh hình với mọi $u \in W$.

Định nghĩa 1.4.2 ([8]). Cho F là không gian lồi địa phương và $W \subset F'$. Tập W được gọi là

(i) *tách điểm* nếu $u(x) = 0$ với mỗi $u \in W$ suy ra $x = 0$;

(ii) *xác định tính bị chặn* nếu mọi tập con $B \subset F$ là bị chặn khi $u(B)$ là bị chặn trong $\mathbb{C}$ với mọi $u \in W$;

(iii) *xác định tôpô* của F nếu tôpô của F là tôpô hội tụ đều trên các tập bị chặn của F' chứa trong W.

Chúng ta bắt đầu phần này bằng việc xem xét mở rộng các kết quả sau của Hải [28, Theorem 4.1 and Theorem 4.2].

Định lý 1.4.4 ([28]). *Cho E, F là các không gian Fréchet-Schwartz và D là tập con mở trong E. Giả sử $E \in (\Omega)$, $F \in (LB_\infty)$, $W \subset F'$ xác định tôpô của F. Khi đó nếu $f : D \to F$ là hàm $\sigma(F, W)$-chỉnh hình thì f chỉnh hình trên một tập con mở trù mật của D.*

Trong trường hợp D là tập con mở của $\mathbb{C}$, Hải [28] đã chỉ ra giả thiết "Schwartz" của không gian F là thừa.

Định lý 1.4.5 ([28]). *Cho D là tập con mở trong $\mathbb{C}$, F là không gian Fréchet. Giả sử $F \in (LB_\infty)$, $W \subset F'$ xác định tôpô của F. Khi đó nếu $f : D \to F$ là hàm $\sigma(F, W)$-chỉnh hình thì f chỉnh hình trên một tập con mở trù mật của D.*

Hải [28] đã chỉ ra rằng Định lý 1.4.4 không đúng trong trường hợp hàm giải tích thực, thậm chí hàm giải tích thực nhận giá trị Banach. Hải cũng chỉ ra điều ngược lại của Định lý 1.4.5 là không đúng. Chúng tôi mở rộng hai định lý này, với điều kiện thêm vào "bị chặn trên các tập bị chặn" của hàm f thì kết luận "*chỉnh hình trên một tập con mở trù mật của D*" được thay bằng "*chỉnh hình trên D*". Chú ý rằng, trong một số trường hợp (chẳng hạn, khi E là không gian Fréchet-Montel), tính "bị chặn trên các tập bị chặn" của hàm f là yếu hơn so với tính "bị chặn địa phương" của hàm f.

Định lý 1.4.6. *Cho E, F là các không gian Fréchet-Schwartz và D là tập con mở trong E. Giả sử $E \in (\Omega)$, E có cơ sở Schauder tuyệt đối, $F \in (LB_\infty)$, $W \subset F'$ xác định tôpô của F. Khi đó nếu $f : D \to F$ là hàm $\sigma(F, W)$-chỉnh hình, bị chặn trên các tập bị chặn trong D thì f là chỉnh hình.*

Để chứng minh định lý này, chúng ta cần kết quả quan trọng sau. Bổ đề này là một kết quả tương tự như [8, Theorem 3.1].

Bổ đề 1.4.7. *Cho E là không gian Fréchet, $D \subset E$ là tập mở và F là không gian Fréchet. Giả sử $f : D \to F$ là một hàm bị chặn địa phương sao cho $\varphi \circ f$ là chỉnh hình với mọi $\varphi \in W \subset F'$, W là tách điểm. Khi đó f là hàm chỉnh hình.*

Nhận xét. Trong Định lý 1.4.6, nếu $f : D \to F$ là hàm $\sigma(F, W)$-chỉnh hình sao cho $q \circ f : D \to \mathbb{R}$ là bị chặn trên các tập bị chặn trong D với tất cả các nửa chuẩn liên tục q trên F thì hàm f cũng chỉnh hình.

Từ Bổ đề 1.4.7 ta nhận được trực tiếp kết quả sau cho trường hợp $E = \mathbb{C}^n$, vì mọi tập W xác định tôpô trong F đều tách điểm và các hàm f bị chặn trên các tập bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ đều bị chặn địa phương. Đây là một tổng quát thật sự của Định lý 1.4.5.

Định lý 1.4.8. *Cho F là không gian Fréchet và W là không gian con F' xác định tôpô của F. Khi đó nếu $f : D \to F$ là hàm $\sigma(F, W)$-chỉnh hình trên tập mở $D \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 1)$ sao cho f là bị chặn trên các tập bị chặn trong D thì f là chỉnh hình.*

Chương 2

THÁC TRIỂN CHỈNH HÌNH CÁC HÀM $(\cdot, W)$-CHỈNH HÌNH

Dựa vào các kết quả đạt được ở chương 1, chúng tôi nghiên cứu bài toán thác triển chỉnh hình từ các tập đặc biệt, thác triển từ bao tuyến tính của một tập bị chặn, thác triển từ tập compact không đa cực. Các kết quả mới của chương này được trích từ các công trình [61, 62].

2.1 Thác triển từ bao tuyến tính của một tập bị chặn

Định nghĩa 2.1.1. Cho E và F là hai không gian lồi địa phương. Hàm chỉnh hình $f : E \to F$ được gọi là *loại bị chặn đều* nếu tồn tại lân cận U của $0 \in E$ và tập bị chặn $B \subset F$ sao cho với mọi $r > 0$, tồn tại $C = C(r)$ thỏa mãn điều kiện $f(rU) \subset C(r)B$.

Ta ký hiệu $H_{ub}(E, F)$ là không gian véctơ con của $H(E, F)$ bao gồm tất cả các hàm chỉnh hình loại bị chặn đều. Ta viết $H_{ub}(E)$ thay cho $H_{ub}(E, \mathbb{C})$. Không gian E được gọi là có tính chất (H_{ub}) (viết tắt là $E \in (H_{ub})$) nếu đẳng thức $H(E) = H_{ub}(E)$ xảy ra.

Tất nhiên ta có $H_{ub}(E, F) \subset H_b(E, F)$. Không gian véctơ $H_{ub}(E, F)$ thường được trang bị tôpô τ_{ub} như sau

$$(H_{ub}(E, F), \tau_{ub}) := \operatorname*{limind}_{p,B}(H_b(E_p, F_B), \tau_b).$$

Tính chất (H_{ub}) cũng là một bất biến tôpô tuyến tính. Trong [83] Vogt đã chứng tỏ rằng $(H_{ub}) \Rightarrow (\Omega)$ và theo Meise và Vogt [46] thì $(\widetilde{\Omega}) \Rightarrow (H_{ub})$ trong trường hợp Fréchet hạch. Tính chất (H_{ub}) cũng được kế thừa qua không gian thương.

Mở rộng kết quả của Meise và Vogt (cho trường hợp hàm giá trị vô hướng) [46, Theorem 3.9], chúng tôi nhận được các kết quả sau:

Định lý 2.1.2. *Cho E là không gian Fréchet với cơ sở Schauder tuyệt đối và F là không gian Fréchet. Giả sử tồn tại $B \in \mathcal{B}(E)$ sao cho một trong các điều kiện sau đây là đúng:*

(i) $E \in (\Omega_B)$ *và* $F \in (LB_\infty)$;

(ii) $E \in (\widetilde{\Omega}_B)$ *và* $F \in (DN)$.

Khi đó, $H_b((E_B, \tau_E), F) = H_{ub}(E, F)$, trong đó τ_E là tôpô của E_B cảm sinh bởi tôpô của E.

Chú ý. Bằng cùng chứng minh, kết luận của Định lý có thể phát biểu rằng, với mỗi $f \in H((E_B, \|\cdot\|_B), F)$ mà f có một thác triển chỉnh hình (theo tôpô τ_E) đến một lân cận của $0 \in E$, được thác triển chỉnh hình đến E.

Trong trường hợp hàm vô hướng và E là không gian Fréchet hạch, Meise và Vogt [46, Theorem 3.9] đã chứng minh rằng $E \in (\widetilde{\Omega})$ khi và chỉ khi các khẳng định tương đương trong định lý trên cũng tương đương với khẳng định sau:

$$\begin{aligned} H(E_B, \tau_E) =& \{f \in H(E_B, \|\cdot\|_B) : \ f \text{ có một thác triển chỉnh hình} \\ & \text{đến một lân cận của } 0 \text{ trong } E\}. \end{aligned}$$

Bây giờ ta xét định lý trên trong trường hợp E là không gian Fréchet hạch cho hàm giá trị Fréchet.

Định lý 2.1.3. *Cho E là không gian Fréchet hạch và F là không gian Fréchet. Giả sử tồn tại $B \in \mathcal{B}(E)$ sao cho một trong các điều kiện sau đây là đúng:*

(i) *$E \in (\Omega_B)$ và $F \in (LB_\infty)$;*

(ii) *$E \in (\widetilde{\Omega}_B)$ và $F \in (DN)$.*

Khi đó mỗi $f \in H((E_B, \|\cdot\|_B), F)$, mà f có một thác triển chỉnh hình (theo tôpô τ_E) đến một lân cận của $0 \in E$, đều có một thác triển chỉnh hình $g \in H_{ub}(E, F)$.

2.2 Thác triển từ tập compact không đa cực

Định nghĩa 2.2.1 ([22])**.** Tập $K \subset D$ được gọi là một *tập duy nhất đối với $H^\infty(D)$* nếu mỗi hàm $f \in H^\infty(D)$ triệt tiêu trên K thì sẽ triệt tiêu trên toàn miền D.

Với đĩa đơn vị $D = \Delta$ trong $\mathbb{C}$, một kết quả cổ điển nói rằng một dãy $K = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ là một tập duy nhất trong không gian các hàm chỉnh hình bị chặn khi và chỉ khi nó thỏa mãn điều kiện Blaschke $\sum_{n\in\mathbb{N}} (1 - |z_n|) = \infty$.

Năm 2009, Frerick, Jordá và Wengenroth [22] (cũng xem [14, Theorem 9]) đã chứng minh được kết quả sau:

Định lý 2.2.2 ([22])**.** *Giả sử K là tập duy nhất đối với $H^\infty(D)$, trong đó D là một miền trong $\mathbb{C}^n$, F là không gian đầy đủ địa phương và $W \subset F'$ là một không gian con xác định tính bị chặn trong F. Nếu $f : K \to F$ là một hàm sao cho $u \circ f$ có một thác triển $g_u \in H^\infty(D)$ với mỗi $u \in W$, thì f có duy nhất một thác triển $g \in H^\infty(D, F)$.*

Trong phần này, bằng cách sử dụng kết quả trên, chúng tôi xét sự thác triển chỉnh hình của các hàm giá trị véctơ từ một tập con không đa cực của một không gian Fréchet hạch.

Chúng tôi đặt vấn đề là tìm các lớp không gian Fréchet đủ lớn để với mọi tập con xác định tính bị chặn W của F' ta sẽ nhận được thác triển chỉnh hình của một hàm f từ tập con compact không đa cực K của $D \subset E$ đến toàn bộ D nếu $F \in (DN)$ và $u \circ f$ thác triển chỉnh hình được với mọi $u \in W$. Tuy nhiên, chúng tôi chỉ đạt được mong muốn trong trường hợp E thuộc lớp không gian Fréchet hạch có tính chất xấp xỉ bị chặn, $W \subset F'$ là tập cụ thể (xem Định lý 2.2.3) và F cũng chỉ là không gian đặc biệt $H(\mathbb{C})$, không gian này có tính chất (DN).

Định lý 2.2.3. *Giả sử E là không gian Fréchet hạch có tính chất xấp xỉ bị chặn và K là một tập compact, lồi, cân, không đa cực trong E. Cho $W = \{\varphi \circ R : \varphi \in [H^\infty(r\Delta)]'\} \subset [H(\mathbb{C})]'$ với $r > 1$, trong đó $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ là đĩa đơn vị trong $\mathbb{C}$ và $R : H(\mathbb{C}) \to H^\infty(r\Delta)$ là ánh xạ hạn chế. Giả sử $f : K \to H(\mathbb{C})$ là một hàm sao cho $u \circ f$ có một thác triển $g_u \in H^\infty(D)$ với mỗi $u \in W$, trong đó D là một lân cận nào đó của K. Khi đó f có một thác triển $g \in H^\infty(D, H(\mathbb{C}))$.*

Chúng ta chưa biết định lý trên có còn đúng hay không với một tập con bất kỳ $W \subset [H(\mathbb{C})]'$ mà nó xác định tính bị chặn trong $H(\mathbb{C})$. Tuy nhiên, nếu E thuộc vào một lớp nhỏ hơn của các không gian Fréchet hạch, cụ thể, E có một cơ sở Schauder tuyệt đối, thì định lý là đúng với các hàm trên K nhận giá trị trong một không gian Fréchet $F \in (DN)$ tùy ý. Ta có kết quả sau:

Định lý 2.2.4. *Giả sử E là một không gian Fréchet hạch có cơ sở Schauder tuyệt đối và K là một tập compact, lồi, cân, không đa cực trong E. Cho F là một không gian Fréchet với $F \in (DN)$ và cho $W \subset F'$ là một không gian con xác định tính bị chặn trong F. Giả sử $f : K \to F$ là một hàm sao cho $u \circ f$ có một thác triển $g_u \in H^\infty(D)$ với mỗi $u \in W$, trong đó D là một lân cận của K. Khi đó f có một thác triển $g \in H^\infty(D, F)$.*

Chú ý. Hải [28, Theorem 3.1] đã chứng minh kết quả này cho trường hợp $W = F'$ (nghĩa là f chỉnh hình yếu), K là một tập con compact duy nhất trong không gian Fréchet $E \in (\Omega)$ và F là không gian Fréchet có tính chất (LB_∞).

Từ tính chất kế thừa qua các không gian con của bất biến (DN), như trong [22, Corollary 2.3] ta nhận được kết quả về tính duy nhất sau đây:

Hệ quả 2.2.5. *Giả sử E là không gian Fréchet hạch với cơ sở Schauder tuyệt đối, K là tập compact, lồi, cân, không đa cực trong E và D là một miền chứa K. Cho F là một không gian Fréchet với $F \in (DN)$ và $G \subset F$ là một không gian con đóng của F. Nếu $f \in H^\infty(D, F)$ là một hàm sao cho $f(K) \subset G$ thì $f(D) \subset G$.*

Chương 3

HÀM $(\cdot, W)$-CHỈNH HÌNH PHÂN BIỆT

Các kết quả mới của chương này được trích từ các công trình [62, 63].

3.1 Một số vấn đề cơ bản về không gian Stein

3.2 Mở rộng Định lý Hartogs trên tích Descartes

Trước hết ta giới thiệu một số khái niệm và ký hiệu.

Định nghĩa 3.2.1. Giả sử D là một tập con của không gian phức hoặc không gian lồi địa phương X và F là một không gian lồi địa phương. Ta nói rằng $f : D \to F$ là *chỉnh hình địa phương* trên D nếu với mỗi $x \in D$ tồn tại một lân cận U của x trong X và một hàm chỉnh hình $\tilde{f}$ trên U sao cho $\tilde{f} = f$ trên $U \cap D$.

Định nghĩa 3.2.2 ([37])**.** Cho X, Y là các không gian phức hoặc lồi địa phương, $E \subset K \subset X$ và $G \subset L \subset Y$ là các tập bất kỳ. Khi đó $(E \times L) \cup (K \times G)$ được gọi là *tập chữ thập*. Với mỗi không gian lồi địa phương F, hàm $f : (E \times L) \cup (K \times G) \to F$ được gọi là *chỉnh hình địa phương phân biệt* nếu

(i) Với mỗi $x \in E$, hàm $f_x(y) := f(x, y)$ là chỉnh hình địa phương trên L;

(ii) Với mỗi $y \in G$, hàm $f^y(x) := f(x, y)$ là chỉnh hình địa phương trên K.

Định nghĩa 3.2.3. Giả sử E, F là các không gian lồi địa phương, D là tập con mở của E, $W \subset F'$. Một hàm $f : D \to F$ được gọi là

(i) (F, W)-*chỉnh hình* trên D (và viết $f \in H^W(D, F)$) nếu $u \circ f$ là chỉnh hình với mọi $u \in W$.

(ii) (F, W)-*chỉnh hình bị chặn* trên D (và viết $f \in H^{W,\infty}(D, F)$) nếu $u \circ f$ là chỉnh hình và bị chặn trên D với mọi $u \in W$.

(iii) (F, W)-*chỉnh hình địa phương* (và viết $f \in H^W_{loc}(D, F)$) nếu với mỗi $z \in D$ tồn tại một lân cận U của z trong D sao cho $f \in H^W(U, F)$.

(iv) (F, W)-*chỉnh hình bị chặn địa phương* (và viết $f \in H^{W,\infty}_{loc}(D, F)$) nếu với mỗi $z \in D$ tồn tại một lân cận U của z trong D sao cho $f \in H^W_{loc}(U, F)$ và $u \circ f$ là bị chặn trên U với mọi $u \in W$.

Chúng tôi bắt đầu mục này bằng định lý sau.

Định lý 3.2.6. *Giả sử K là một tập $\widetilde{L}$-chính quy compact trong một không gian Stein bất khả quy địa phương X và Y là một không gian Stein với $H(Y) \in (DN)$. Cho F là một không gian đầy đủ địa phương và $W \subset F'$ là một không gian con xác định tính bị chặn trong F. Giả sử $f : K \times Y \to F$ là một hàm sao cho:*

(i) *Với mỗi $z \in K$ hàm $f_z \in H^{W,\infty}(Y, F)$, trong đó $f_z : Y \to F$ được xác định bởi*

$$f_z(w) = f(z, w), w \in Y;$$

(ii) *Với mỗi $w \in Y$ hàm $f^w \in H^W(K, F)$ và $\{u \circ f^w\}_{u \in W}$ là bị chặn đều địa phương trên K, trong đó $f^w : K \to F$ được xác định bởi*

$$f^w(z) = f(z, w), z \in K.$$

Khi đó f có thể thác triển đến một hàm chỉnh hình trên một lân cận $U \times Y$ của $K \times Y$.

3.3 Mở rộng Định lý Hartogs trên các tập chữ thập

Định lý 3.3.1. *Giả sử $U \subset \mathbb{C}^n, V \subset \mathbb{C}^m$ là các miền và $K \subset U, L \subset V$ là những tập con compact, không đa cực, F là một không gian Fréchet và $W \subset F'$ là một không gian con xác định tính bị chặn trong F. Giả sử $Y = (K \times V) \cup (U \times L)$ và $f : Y \to F$ là một hàm thỏa mãn các điều kiện:*

(i) *Với mỗi $u \in W$ và $z \in K$ hàm $u \circ f_z \in H^\infty(V)$, trong đó $f_z : V \to F$ được xác định bởi*

$$f_z(w) = f(z, w), w \in V;$$

(ii) *Với mỗi $u \in W$ và $w \in L$ hàm $u \circ f^w \in H^\infty(U)$, trong đó $f^w : U \to F$ được xác định bởi*

$$f^w(z) = f(z, w), z \in U.$$

Khi đó f có thể thác triển chỉnh hình đến một lân cận mở D của

$$Y^* = (K \times L^*) \cup (K^* \times L)$$

mà nó là hợp của những thành phần liên thông của $\widetilde{Y}$ có giao với $K^* \times L^*$, trong đó

$$\widetilde{Y} = \{(z, w) \in U \times V : \omega(z, K^*, U) + \omega(w, L^*, V) < 1\}.$$

Từ định lý này ta nhận được kết quả sau.

Mệnh đề 3.3.2. *Cho K, L lần lượt là các tập compact, liên thông, không đa cực trong $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m$ tương ứng và F là một không gian Fréchet. Giả sử $f : K \times L \to F$ là một hàm chỉnh hình phân biệt. Ký hiệu $A(f) = \{(x, y) \in K \times L :$ f có một thác triển chỉnh hình đến một lân cận mở của (x, y) trong $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m\}$ và $S(f) = (K \times L)\backslash A(f)$. Nếu S_1 và S_2 lần lượt là những phép chiếu từ $S(f)$ vào $\mathbb{C}^n$ và $\mathbb{C}^m$ tương ứng thì S_1 là đa cực trong $\mathbb{C}^n$ và S_2 là đa cực trong $\mathbb{C}^m$.*

Nếu chúng ta thay F trong Định lý 3.3.1 là không gian đầy đủ địa phương và điều kiện yếu hơn của các họ $\{u \circ f_z\}_{u\in W}$, $\{u \circ f^w\}_{u\in W}$ và K, L là các tập có dạng F_σ thì chúng ta nhận được kết quả sau:

Định lý 3.3.3. *Giả sử K và L lần lượt là các tập không đa cực liên thông, dạng F_σ trong $\mathbb{C}^p$ và $\mathbb{C}^q$ tương ứng, $E \subset K$ và $G \subset L$ là không đa cực. Cho F là một không gian đầy đủ địa phương và $W \subset F'$ là một không gian con xác định tính bị chặn trong F. Giả sử $f : (E \times L) \cup (K \times G) \to F$ sao cho:*

(i) *Với mỗi $z \in E$ hàm $f_z \in H^{W,\infty}_{loc}(L, F)$, trong đó $f_z : L \to F$ được xác định bởi*

$$f_z(w) = f(z, w), w \in L;$$

(ii) *Với mỗi $w \in G$ hàm $f^w \in H^{W,\infty}_{loc}(K, F)$, trong đó $f^w : K \to F$ được xác định bởi*

$$f^w(z) = f(z, w), z \in K.$$

Khi đó tồn tại các tập đa cực $E' \subset E$ và $G' \subset G$ sao cho f là chỉnh hình địa phương trên $[(E\backslash E') \times L] \cup [K \times (G\backslash G')]$.

Định lý 3.3.4. *Với giả thiết như trong Định lý 3.3.3, nhưng K và L là compact, lồi, không đa cực thì tồn tại các tập đa cực $E' \subset E$ và $G' \subset G$ sao cho f được thác triển chỉnh hình đến một lân cận của $[(E\backslash E') \times L] \cup [K \times (G\backslash G')]$.*

Hệ quả 3.3.5. *Giả thiết như trong Định lý 3.3.3, nhưng E và G là đa chính quy, hàm f là chỉnh hình địa phương trên $(E \times L) \cup (K \times G)$.*

Chú ý rằng tính đa chính quy là mạnh hơn tính không đa cực. Ta nhận được kết quả:

Định lý 3.3.6. *Giả sử K và L lần lượt là các miền trong $\mathbb{C}^p$ và $\mathbb{C}^q$ tương ứng, $E \subset K$ và $G \subset L$ là đa chính quy, compact. Cho F là một không gian đầy đủ địa phương và $W \subset F'$ là một không gian con xác định tính bị chặn trong F. Giả sử $f : (E \times L) \cup (K \times G) \to F$ sao cho:*

(i) *Với mỗi $z \in E$ hàm $f_z \in H^{W,\infty}(L, F)$ và $\{u \circ f_z\}_{u\in W}$ là bị chặn đều địa phương trên G trong đó $f_z : L \to F$ được cho bởi*

$$f_z(w) = f(z, w), w \in L;$$

(ii) *Với mỗi $w \in G$ hàm $f^w \in H^{W,\infty}(K, F)$ và $\{u \circ f^w\}_{u\in W}$ là bị chặn đều địa phương trên E trong đó $f^w : K \to F$ được cho bởi*

$$f^w(z) = f(z, w), z \in K.$$

Khi đó f có một thác triển chỉnh hình đến một lân cận của $(E \times L) \cup (K \times G)$.

Chương 4

MỘT SỐ ÁP DỤNG

Các kết quả mới của chương này được trích từ công trình [61].

4.1 Bài toán Wrobel

Năm 1982, trong [84] Wrobel đã đặt ra bài toán:

Cho $D \subset \mathbb{C}$ là một miền, F là một không gian Banach và $f : D \to F$ là hàm bị chặn địa phương. Hàm f có chỉnh hình hay không nếu tồn tại một không gian lồi địa phương Y và một đơn ánh tuyến tính liên tục $j : F \to Y$ sao cho $j \circ f$ là chỉnh hình.

Grosse-Erdmann đã đưa ra câu trả lời trong trường hợp f là bị chặn trên $M \cap K$ với mỗi tập con compact K của D, trong đó $M \subset D$ xác định hội tụ đều địa phương trong $H(D)$ [24, Theorem 5] và trường hợp f là bị chặn khuếch đại với D là một miền trong không gian lồi địa phương E và F là một không gian đầy đủ địa phương [24, Theorem 6]. Ở đây, hàm f được gọi là bị chặn khuếch đại nếu $q \circ f : D \to \mathbb{R}$ là bị chặn địa phương với mọi nửa chuẩn liên tục q trên F.

Sử dụng Định lý 1.4.6, 1.4.8 với $W = \{y' \circ j : y' \in W_Y\}$, trong đó $W_Y \subset Y'_\beta$ xác định tôpô của Y, ta có được một cách trực tiếp các kết quả sau cho bài toán Wrobel.

Định lý 4.1.1. *Giả sử E, F là các không gian Fréchet và $f : D \to F$ là hàm trên một miền $D \subset E$. Giả sử tồn tại không gian lồi địa phương Y và đơn ánh tuyến tính liên tục $j : F \to Y$ sao cho $j \circ f : D \to Y$ là chỉnh hình. Khi đó f là chỉnh hình nếu một trong các điều kiện sau thỏa mãn:*

(i) *E, F là Schwartz, E có cơ sở Schauder tuyệt đối, $E \in (\Omega)$, $F \in (LB_\infty)$ và f bị chặn trên các tập bị chặn trong D;*

(ii) *E, F là Schwartz, E có cơ sở Schauder tuyệt đối, $E \in (\Omega)$, $F \in (LB_\infty)$ và $q \circ f : D \to \mathbb{R}$ là bị chặn trên các tập bị chặn trong D với mọi nửa chuẩn liên tục q trên F;*

(iii) *$E = \mathbb{C}^n (n \geqslant 1)$ và f là bị chặn trên các tập bị chặn trong D.*

4.2 Các định lý hội tụ kiểu Vitali

Trong phần này ta xét đến dãy các hàm chỉnh hình mà nó hội tụ trên một tập con D_0 của miền D. Yêu cầu đặt ra là tìm các điều kiện để có thể đảm bảo dãy hàm này hội tụ trên toàn miền D. Các kết quả dạng như vậy gọi là hội tụ kiểu Tauber. Một ví dụ quan trọng cho các kết quả kiểu này là Định lý Vitali. Trong trường hợp hàm vô hướng, chứng minh sớm nhất của định lý này được đưa ra nhờ sự trợ giúp của Định lý Montel. Tuy nhiên, Định lý Montel không còn đúng cho trường hợp hàm giá trị véctơ. Nhưng điều đặc biệt là Định lý Vitali vẫn còn đúng cho trường hợp hàm giá trị Banach [8, Theorem 2.1]. Ở đó việc chấp nhận một điểm giới hạn trong D của tập con D_0 và tính chất bị chặn địa phương của dãy hàm được xem xét. Trong phần đầu của mục này chúng tôi mở rộng kết quả Định lý Vitali được đề cập trong [8] cho trường hợp E, F là các không gian Fréchet. Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu các định lý kiểu Vitali trong trường hợp các không gian Fréchet thỏa mãn các bất biến tôpô tuyến tính.

Trước hết ta cần một kết quả bổ trợ cho các chứng minh trong chương này.

Định nghĩa 4.2.1. Cho D là một miền trong không gian Fréchet E. Tập $D_0 \subset D$ được gọi là *tập hiếm* trong D nếu phần trong của $\overline{D_0}$ bằng rỗng. Tập $D_0 \subset D$ được gọi là *tập không hiếm* trong D nếu phần trong của $\overline{D_0}$ khác rỗng.

Bổ đề 4.2.2. *Cho D là một miền trong không gian Fréchet E và $f : D \to F$ là chỉnh hình, trong đó F là không gian lồi địa phương Hausdorff. Giả sử $D_0 = \{z \in D : \ f(z) \in G\}$ là tập không hiếm trong D, với G là không gian con đóng của F. Khi đó $f(z) \in G$ với mọi $z \in D$.*

Trong [8] Arendt và Nikolski đã chứng minh kết quả sau:

Định lý 4.2.3 ([8]). *Cho $D \subset \mathbb{C}$ là tập mở, liên thông. Giả sử $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ là dãy các hàm chỉnh hình trên D nhận giá trị trong không gian Banach F và bị chặn địa phương (nghĩa là với mỗi $z \in D$ tồn tại lân cận sao cho $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ là bị chặn trên lân cận đó). Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(i) *Dãy $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên tất cả các tập con compact của D đến hàm chỉnh hình $f : D \to F$;*

(ii) *Tập hợp $D_0 = \{z \in D : \lim\limits_{i\to\infty} f_i(z)$ tồn tại$\}$ có điểm giới hạn trong D.*

Bằng cách sử dụng các Bổ đề 1.4.7 và 4.2.2, chúng tôi sẽ mở rộng định lý trên.

Định lý 4.2.4. *Cho E, F là các không gian Fréchet và $D \subset E$ là một miền. Giả sử $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ là dãy các hàm chỉnh hình bị chặn địa phương trên D nhận giá trị trong F. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) *Dãy $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên các tập con compact của D đến hàm chỉnh hình $f : D \to F$;*

(ii) *Tập $D_0 = \{z \in D : \lim\limits_{i\to\infty} f_i(z)$ tồn tại$\}$ là không hiếm trong D.*

Định lý 4.2.5. *Cho E, F là các không gian Fréchet-Schwartz và $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ là dãy các hàm chỉnh hình từ một miền $D \subset E$ vào F sao cho $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ bị chặn trên các tập bị chặn trong D. Giả sử E có cơ sở Schauder tuyệt đối, $E \in (\Omega), F \in (LB_\infty)$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(i) *Dãy $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên tất cả các tập con compact của D đến một hàm chỉnh hình $f : D \to F$;*

(ii) *Tập $D_0 = \{z \in D : \lim_{i\to\infty} f_i(z)$ tồn tại$\}$ là không hiếm trong D.*

Hệ quả 4.2.6. *Giả sử E, F là các không gian Fréchet-Schwartz và $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ là dãy các hàm chỉnh hình từ một miền $D \subset E$ vào F sao cho $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ bị chặn trên các tập bị chặn trên D. Giả sử E có cơ sở Schauder tuyệt đối, $E \in (\Omega), F \in (LB_\infty)$. Khi đó tồn tại một dãy con hội tụ đều đến một hàm chỉnh hình trên tất cả các tập con compact của D nếu tập $D_0 = \{z \in D : \{f_i(z) : i \in \mathbb{N}\}$ là compact tương đối trong $F\}$ là không hiếm trên D.*

Tương tự, chúng tôi suy ra từ Định lý 1.4.8 kết quả.

Định lý 4.2.7. *Cho $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ là một dãy của các hàm chỉnh hình từ miền $D \subset \mathbb{C}^n (n \geqslant 1)$ vào một không gian Fréchet F, sao cho $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ bị chặn trên các tập bị chặn trong D. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(i) *Dãy $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên tất cả các tập con compact của D đến một hàm chỉnh hình $f : D \to F$;*

(ii) *Tập $D_0 = \{z \in D : \lim_{i\to\infty} f_i(z)$ tồn tại$\}$ có điểm tụ trong D.*

Từ Định lý 4.2.7, như trong Hệ quả 4.2.6 ta có

Hệ quả 4.2.8. *Cho F là không gian Fréchet và $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ là một dãy các hàm chỉnh hình từ một miền $D \subset \mathbb{C}^n (n \geqslant 1)$ vào trong F sao cho $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ bị chặn trên các tập bị chặn trong D. Khi đó tồn tại một dãy con hội tụ đều đến một hàm chỉnh hình trên tất cả các tập con compact của D nếu tập $D_0 = \{z \in D : \{f_i(z) : i \in \mathbb{N}\}$ là compact tương đối trong $D\}$ có điểm tụ trong D.*

KẾT LUẬN

Nội dung chủ yếu của luận án là nghiên cứu các hàm $(\cdot, W)$-chỉnh hình và áp dụng. Luận án đã đóng góp những kết quả sau đây:

- Đưa ra các đặc trưng mới (Ω^{∞}) và (Ω_B) cho bất biến tôpô tuyến tính (Ω). Các kết quả này khắc phục một số khó khăn chưa vượt qua được trước đây khi khảo sát các hàm chỉnh hình trên lớp không gian này. Chú ý rằng, các không gian có tính chất (Ω) thuộc lớp rộng nhất các không gian Fréchet theo phân loại bởi các bất biến tôpô tuyến tính. Đây là một trong các công cụ quan trọng trong chứng minh các kết quả về sau của luận án về các hàm chỉnh hình trên lớp không gian này.

- Khẳng định được rằng mọi hàm chỉnh hình trên một tập mở của không gian Fréchet E nhận giá trị trong không gian Fréchet F đều bị chặn địa phương (Định lý 1.3.2).

- Đưa ra điều kiện để đảm bảo cho tính chỉnh hình của bất kỳ hàm $\sigma(F, W)$-chỉnh hình, bị chặn trên các tập bị chặn trong D (Định lý 1.4.6).

- Chứng minh được sự thác triển chỉnh hình các hàm $(\cdot, W)$-chỉnh hình từ bao tuyến tính của một tập bị chặn (Định lý 2.1.2, Định lý 2.1.3), từ tập compact không đa cực (Định lý 2.2.3, Định lý 2.2.4).

- Mở rộng Định lý Hartogs trên tích Descartes của tập con $\widetilde{L}$-chính quy compact trong không gian Stein với một không gian Stein đến một lân cận nào đó của nó (Định lý 3.2.6). Đồng thời mở rộng được Định lý Hartogs trên các tập chữ thập có kỳ dị đa cực, kỳ dị đa chính quy, cũng như không có kỳ dị (các Định lý 3.3.1, 3.3.3, 3.3.4, 3.3.6).

- Áp dụng các kết quả phía trước để giải quyết bài toán Wrobel trong trường hợp tổng quát hơn, cũng như các định lý kiểu Vitali đối với các dãy hàm chỉnh hình trên không gian Fréchet (các Định lý 4.1.1, 4.2.4, 4.2.5, 4.2.7).

Các kết quả trên là mới và là những đóng góp thực sự vào hướng nghiên cứu về các hàm $(\cdot, W)$-chỉnh hình và áp dụng. Chúng có ý nghĩa khoa học, mang tính thời sự và được sự quan tâm của nhiều tác giả trong lĩnh vực nghiên cứu của luận án.

Chúng tôi dự định trong tương lai sẽ nghiên cứu các vấn đề sau:

- Nghiên cứu các bài toán trên với các tập thử W khác.

- Khảo sát bài toán trong trường hợp các không gian Fréchet không có các bất biến tôpô tuyến tính.

- Khảo sát bài toán trong không gian có trọng các hàm chỉnh hình.

- Tìm kiếm một số ứng dụng.

Tài liệu tham khảo

[1] O. Alehyane and A. Zeriahi (2001), "Une nouvelle version du théorème d'extension de Hartogs pour les applications séparément entre espaces analytiques", *Ann. Polon. Math.*, 76, 245-278.

[8] W. Arendt and N. Nikolski (2000), "Vector-valued holomorphic functions revisited", *Math. Z.*, 234, 777-805.

[10] E. Bedford and B. A. Taylor (1982), "A new capacity of plurisubharmonic functions", *Acta. Math.*, 149, 1-40.

[14] J. Bonet, L. Frerick and E. Jordá (2007), "Extension of vector valued holomorphic and harmonic functions", *Studia Math.*, 183, 225-248.

[15] S. Dineen (1981), *Complex Analysis in Locally Convex Spaces*, North-Holland Math. Stud.

[16] S. Dineen (1999), *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer Verlag.

[17] S. Dineen, R. Meise and D. Vogt (1984), "Characterization of nuclear Fréchet spaces in which every bounded set is polar", *Bull. Soc. Math. France*, 112, 41-68.

[18] N. Dunford (1938), "Uniformity in linear spaces", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 42(2), 305-356.

[19] G. Fischer (1976), *Complex Analytic Geometry*, Lecture Notes in Math., Springer, 538.

[20] F. Forstnerič (2011), *Stein Manifolds and Holomorphic Mappings*, Springer Berlin.

[21] L. Frerick and E. Jordá (2007), "Extension of vector-valued functions", *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 14(3), 499-507.

[22] L. Frerick, E. Jordá and J. Wengenroth (2009), "Extension of vector-valued functions", *Math. Nachr.*, 282, 690-696.

[23] K. G. Grosse-Erdmann (1992), *The Borel-Okada Theorem Revisited*, Habilitationsschrift Fernuniversität Hagen, Hagen.

[24] K. G. Grosse-Erdmann (2004), "A weak criterion for vector-valued holomorphy", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 136, 399-411.

[25] A. Grothendieck (1953), “Sur certains espaces de fonctions holomorphes. I”, *J. Reine Angew. Math.*, 192, 35-64.

[28] L. M. Hai (2002), “The property (LB_∞) and Frechet-valued holomorphic functions on compact sets”, *Vietnam J. Math.*, 31(3), 281-294.

[37] M. Jarnicki and P. Pflug (2003), “An extension theorem for separately holomorphic functions with pluripolar singularities”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(3), 1251-1267.

[40] T. Kato (1980), *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer Berlin.

[43] M. Klimek (1991), *Pluripotential Theory*, Clarendon Press, Oxford.

[46] R. Meise and D. Vogt (1986), “Holomorphic functions of uniformly bounded type on nuclear Frechet spaces”, *Studia Math.*, 83, 147-166.

[48] Ph. Noverraz (1973), *Pseudo-convexite, Convexite Polynomiale et Domaines d’Holomorphie en Dimension Infinie*, North-Holland Math. Stud.

[56] A. Pietsch (1971), *Nuclear locally convex spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb. Springer Verlag.

[61] T. T. Quang, L. V. Lam and N. V. Dai (2013), “On $\sigma(\cdot, W)$-holomorphic functions and theorems of Vitali-type”, *Complex Anal. Oper. Theory*, 7(1), 237-259.

[62] T. T. Quang and N. V. Dai (2014), “On Hartogs extension theorems for separately $(\cdot, W)$-holomorphic functions”, *Int. J. Math.*, 25(12), 1450112 (15 pages).

[63] T. T. Quang and N. V. Dai (2015), “On the holomorphic extension of vector valued functions”, *Complex Anal. Oper. Theory*, 9, 567-591.

[64] H. H. Schaefer (1991), *Topological Vector Spaces*, Springer Berlin.

[69] J. Siciak (2001), “Holomorphic functions with singularities on algebraic sets”, *Uni. Iagell. Acta Math.*, 75, 9-16.

[78] D. Vogt (1977), “Charakterisierung der Unterräume von *s*”, *Math. Z.*, 155, 109-117.

[79] D. Vogt (1977), “Subspaces and quotient spaces of *s*”, in Functional Analysis: Surveys and Recent Results III (ed. K. D. Bierstedt, B. Fuchssteiner), *North-Holland. Math. Stud.*, 27, 167-187.

[80] D. Vogt (1982), “Eine Charakterisierung der Potenzeihenräume von endlichem Typ und ihre Folgerungen”, *Manuscripta Math.*, 37, 269-301.

[81] D. Vogt (1982), “Charakterisierung der Unterräume eines nuklearen Stabilen Potenzeihenräume von endlichem Typ”, *Studia Math.*, 71, 251-270.

[82] D. Vogt (1983), “Frecheträume zwischen denen jede stetige linear Abbildung beschraukt ist”, *J. Reine Angew. Math.*, 345, 182-200.

[83] D. Vogt (1985), "On two classes of F-spaces", *Arc. Math.*, 45, 255-266.

[84] V. Wrobel (1982), "Analytic functions into Banach spaces and a new characterization for isomorphic embeddings", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 85, 539-543.

[85] V. P. Zahariuta (1980), "Isomorphism of spaces of analytic functions", *Soviet Math. Dokl.*, 22, 631-634.

[86] A. Zeriahi (1991), "Fonction de Green pluricomplexe à pôle l'infini sur un espace de Stein parabolique", *Math. Scand.*, 69, 89-126.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ

1) T. T. Quang, L. V. Lam and N. V. Dai (2013), "On $\sigma(\cdot, W)$-holomorphic functions and theorems of Vitali-type", *Complex Anal. Oper. Theory*, 7(1), 237-259.

2) T. T. Quang and N. V. Dai (2014), "On Hartogs extension theorems for separately $(\cdot, W)$-holomorphic functions", *Int. J. Math.*, 25(12), 1450112 (15 pages).

3) T. T. Quang and N. V. Dai (2015), "On the holomorphic extension of vector valued functions", *Complex Anal. Oper. Theory*, 9, 567-591.