Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
**Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường**
website: sj.ctu.edu.vn

*DOI:10.22144/ctu.jvn.2019.156*

# ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM CHO QUÁ TRÌNH KHUẾCH TÁN TRONG KHÔNG GIAN MỘT CHIỀU

Lâm Hoàng Chương[1*], Dương Thị Bé Ba[1], Lê Hoài Nhân[1] và Trần Thị Thiện[2]
[1]*Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*
[2]*Lớp Toán ứng dụng khóa 42, Trường Đại học Cần Thơ*
**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Lâm Hoàng Chương (email: lhchuong@ctu.edu.vn)*

***Thông tin chung:***
*Ngày nhận bài: 07/09/2019*
*Ngày nhận bài sửa: 11/10/2019*
*Ngày duyệt đăng: 25/12/2019*

***Title:***
*Central limit theorem for diffusion process in one dimension*

***Từ khóa:***
*Định lý giới hạn trung tâm, phương pháp moment, quá trình khuếch tán*

***Keywords:***
*Central limit theorem, diffusion process, method of moment*

**ABSTRACT**

*The aim of this paper is to study the model of diffusion process in one dimension. The method of moments is used, as in Depauw and Derrien (2009) and Chuong (2014) to prove that this process converges in distribution to a normal law (Theorem 1.1). More precisely, with $L$ be the corresponding infinitesimal generator of the previous process and a given function f, we solve the Poisson's equation $Lg = f$ and then treat the limits of its solutions, the central limit theorem is instantly given by the convergence of the moment.*

**TÓM TẮT**

*Mục tiêu chính của bài báo là nghiên cứu mô hình quá trình khuếch tán trong một chiều. Sử dụng phương pháp như trong các bài báo của Depauw and Derrien (2009) và Chuong (2014) để chứng minh sự hội tụ theo phân phối đến phân phối chuẩn của quá trình đang xét (Định lý 1.1). Chi tiết hơn, với $L$ là toán tử Markov cực vi của quá trình như trên và hàm $f$ cho trước, bằng cách giải phương trình Poisson $Lg = f$ rồi sau đó tìm giới hạn liên quan đến nghiệm của nó, khi đó định lý giới hạn trung tâm sẽ được cho bởi sự hội tụ của các moment.*

Trích dẫn: Lâm Hoàng Chương, Dương Thị Bé Ba, Lê Hoài Nhân và Trần Thị Thiện, 2019. Định lý giới hạn trung tâm cho quá trình khuếch tán trong không gian một chiều. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 55(6A): 37-41.

## 1 GIỚI THIỆU

Xét một quá trình khuếch tán $(X_t)_{t\geq 0}$ với điều kiện ban đầu $X_0 = 0$ và toán tử cực vi được xác định bởi

$$Lf(k) = \frac{b\prime(x)}{2a(x)} f'(x) + \frac{b(x)}{2a(x)} f"(x) \qquad (1.1)$$

trong đó

$a, b\colon \mathbb{R} \to (0; +\infty)$ liên tục

$b'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục

và $f$ là hàm đo được trên không gian trạng thái $\mathbb{R}$.

Quá trình khuếch tán trên thỏa mãn phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + \mu(X_t)dt \qquad (1.2)$$

trong đó $(B_t)_{t\geq 0}$ là chuyển động Brow, các hệ số

$\sigma^2(x) = b(x)/a(x)$ và $\mu(x) = [2b(x) + b'(x)]/2a(x)$.

Mục tiêu của bài báo là nghiên cứu phân phối giới hạn của $X_t$ khi $t \to +\infty$.

Mô hình quá trình khuếch tán là một quá trình ngẫu nhiên có nhiều ứng dụng trong thực tế. Đặc biệt trong vật lý động lực học, nó là sự "di chuyển" ngẫu nhiên của một chất điểm trên dây dẫn đồng chất.

Trong phạm vi bài báo này, mô hình của một quá trình khuếch tán $(X_t)_{t\geq 0}$ được xét trên không gian trạng thái $\mathbb{R}$ có điều kiện ban đầu $X_0 = 0$. Khi đó, với hệ số chuẩn hóa, quá trình đã cho sẽ hội tụ theo phân phối đến quy luật chuẩn khi thời gian $t$ đủ lớn. Định lý đó được phát biểu như sau

**Định lý 1.1** *Giả sử* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} a(x) = \alpha > 0$ *và* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} b(x) = \beta < +\infty$ *thì* $\frac{X_t}{\sqrt{t}} \xrightarrow{Dist} N\left(0, \frac{\beta}{\alpha}\right)$ *khi* $t \to +\infty$*. Phân phối giới hạn này bằng 0 nếu* $\alpha = +\infty$ *hoặc* $\beta = 0$.

*Trong biểu thức trên,* $\xrightarrow{Dist}$ *ký hiệu cho hội tụ theo phân phối của các biến ngẫu nhiên và* $N(\mu, \sigma^2)$ *là luật phân phối chuẩn với kỳ vọng* $\mu$ *và phương sai* $\sigma^2$.

Vấn đề này cũng đã được đề cập trong bài báo của Papanicolaou and Varadhan (1982) trong trường hợp nhiều chiều được chứng minh thông qua phân tích Martingale và với điều kiện các hàm $a(x)$ và $b(x)$ bị chặn, tức là $0 < C < a(x), b(x) < D < \infty$. Trong bài báo này chỉ cần điều kiện $a(x) > 0$ và $b(x) < \infty$. Hơn nữa, việc chứng minh Định lý 1.1 được tiến hành thông qua việc sử dụng phương pháp moment.

## 2 PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Trong tài liệu của Billingsley (1995) Định lý 30.2 có đề cập đến phương pháp moment trong nghiên cứu định lý giới hạn trong lý thuyết xác suất được trình bày lại như sau:

**Định lý 2.1** (Billingsley, 1995) *Cho* $(Z_t)_{t\geq 0}$ *là các biến ngẫu nhiên cùng xác định trên một không gian xác suất và* $Z$ *là một biến ngẫu nhiên có luật phân phối xác suất hoàn toàn được xác định bởi các moment của nó. Nếu* $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbb{E}(Z_t^\ell) = \mathbb{E}(Z^\ell)$ *với mọi* $\ell = 1, 2, 3, \ldots$ *thì* $Z_t$ *hội tụ theo phân phối đến* $Z$ *khit* $\to +\infty$.

Một tính chất quan trọng của phân phối chuẩn được nhắc lại như sau: nếu $Z \sim N(0, \sigma^2)$ thì với mỗi $\ell = 1, 2, 3, \ldots$

$$\mathbb{E}\{Z^\ell\} = \begin{cases} 0 \quad , & \ell = 2k-1 \\ \dfrac{(2k)!}{k!\,2^k}\sigma^{2k}, & \ell = 2k. \end{cases}$$

Trong phần tiếp theo Định lý 2.1 sẽ được áp dụng để chứng minh Định lý 1.1 với

$$Z_t = X_t/\sqrt{t} \text{ và } Z \sim N\left(0, \frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Trong biểu thức trên phương sai được ký hiệu là $\sigma^2 = \frac{\beta}{\alpha}$.

**Bổ đề 2.1** (Phương trình Poisson) *Cho trước hàm số* $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thì tồn tại hàm* $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sao cho*

$$\begin{cases} L\phi \equiv \psi \\ \phi(0) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

*Chứng minh.* Toán tử cực vi của quá trình khuếch tán đã cho được viết lại như sau $Lf(k) = \frac{1}{2a(x)}\frac{d}{dx}\left(b(x)\frac{df}{dx}\right)$.

Từ đó dẫn đến phương trình $L\phi(x) = \psi(x)$ tương đương với phương trình $\frac{1}{2a(x)}\frac{d}{dx}\left(b(x)\frac{d\phi}{dx}\right) = \psi(x)$.

Giải trực tiếp phương trình trên thì $\phi(x) = \begin{cases} \int_{v=0}^{x} \frac{1}{b(v)} \int_{u=0}^{v} 2a(u)\psi(u)du\,dv, & x \geq 0 \\ \int_{v=x}^{0} \frac{1}{b(v)} \int_{u=v}^{0} 2a(u)\psi(u)du\,dv, & x < 0. \end{cases}$

Đây là một nghiệm của phương trình đã cho. □

**Bổ đề 2.2** *Cho* $f(x)$, $g(x)$ *là hàm dương, liên tục và* $n \in \mathbb{N}$. *Giả sử*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \bar{u}, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \bar{v}.$$

*Nếu* $\bar{u}$ *và* $\bar{v}$ *hữu hạn thì*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x t^n f(t)g(t)dt = \frac{\bar{u}\bar{v}}{n+1}. \tag{2.2}$$

*Chứng minh.* Với $n = 0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)g(t)dt = \bar{u}\bar{v}$.

Thật vậy

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)g(t)dt - \bar{u}\bar{v}\right| &\leq \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)(g(t)-\bar{v})dt\right| + \left|\frac{1}{x}\int_0^x (f(t)-\bar{u})\bar{v}dt\right| \\ &\leq \frac{1}{x}\int_0^x f(t)|g(t)-\bar{v}|dt + \bar{v}\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - \bar{u}\right|. \end{aligned}$$

Vì $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \bar{v}$ nên $\forall\varepsilon > 0, \exists x_0 > 0$ sao cho $\forall x \geq x_0$, dẫn đến $|g(x) - \bar{v}| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Khi đó

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)|g(t)-\bar{v}|dt$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^{x_0} f(t)|g(t)-\bar{v}|dt + \frac{1}{x}\int_{x_0}^{x} f(t)|g(t)-\bar{v}|dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

khi $x$ đủ lớn.

Mặt khác $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \bar{u}$

nên $\forall\varepsilon > 0, \exists x_0 > 0$ sao cho $\forall x \geq x_0$ thì $\bar{v}\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - \bar{u}\right| < \bar{v}\frac{\varepsilon}{2\bar{v}} = \frac{\varepsilon}{2}$.

Suy ra

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)g(t)dt - \bar{u}\bar{v}\right| < \varepsilon$$

với mọi $\varepsilon > 0$ khi $x$ đủ lớn.

Bây giờ giả sử rằng (2.2) đúng cho $n \geq 0$, thì nó cũng đúng cho $n+1$, tức là

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{n+2}}\int_0^x t^{n+1}f(t)g(t)dt = \frac{\bar{u}\bar{v}}{n+2}$$

Đặt $W_x = \int_0^x t^n f(t)g(t)dt$, sử dụng phương pháp tích phân từng phần thì

$$\frac{1}{x^{n+2}}\int_0^x t^{n+1}f(t)g(t)dt$$

$$= \frac{1}{x^{n+1}}W_x - \frac{1}{x^{n+2}}\int_0^x W_t dt$$

$$= I_1 - I_2$$

Theo giả thuyết $\lim_{x\to+\infty} I_1 = \frac{\bar{u}\bar{v}}{n+1}$, và hơn nữa

$$\left|I_2 - \frac{\bar{u}\bar{v}}{(n+1)(n+2)}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{x^{n+2}}\int_0^x W_t dt - \frac{\bar{u}\bar{v}}{(n+1)(n+2)}\right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{x^{n+2}}\int_0^x t^{n+1}\left(\frac{W_t}{t^{n+1}} - \frac{\bar{u}\bar{v}}{(n+1)}\right)dt\right|$$

$$+ \left|\left[\frac{1}{x^{n+2}}\int_0^x t^{n+1}dt - \frac{1}{(n+2)}\right]\frac{\bar{u}\bar{v}}{(n+1)}\right|$$

$$\leq \frac{1}{x^{n+2}}\int_0^x t^{n+1}\left|\frac{W_t}{t^{n+1}} - \frac{\bar{u}\bar{v}}{(n+1)}\right|dt$$

$$+ \left|\frac{1}{x^{n+2}}\int_0^x t^{n+1}dt - \frac{1}{(n+2)}\right|\frac{\bar{u}\bar{v}}{(n+1)}$$

$$< \varepsilon$$

với mọi $\varepsilon > 0$ khi $x$ đủ lớn. Từ đó dẫn đến

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{n+2}}\int_0^x t^{n+1}f(t)g(t)dt = \frac{\bar{u}\bar{v}}{n+2}.$$

Như vậy (2.2) đã được chứng minh. □

## 3 KẾT QUẢ THỰC HIỆN

**Mệnh đề 2.1** *Với quá trình khếch tán đã cho*

$$\lim_{t\to+\infty}\mathbb{E}\left\{\left(\frac{X_t}{\sqrt{t}}\right)^{2k}\right\} = \frac{(2k)!}{k!\,2^k}\sigma^{2k}$$

*luôn đúng với mỗi* $k \geq 1$.

*Chứng minh.* Xét một dãy các hàm số không âm $f_k$, xác định trên $\mathbb{R}$, sao cho

$$\begin{cases} Lf_k \equiv f_{k-1}, & k \geq 1 \\ f_0 \equiv 1 \\ f_0(0) = 0, & k \geq 1 \end{cases}.$$

Áp dụng Bổ đề 2.1 thì các nghiệm của phương trình đã cho là

$$f_1(x) = \begin{cases} \int_{v=0}^{x}\frac{1}{b(v)}\int_{u=0}^{v} 2a(u)du\,dv, & x \geq 0 \\ \int_{v=x}^{0}\frac{1}{b(v)}\int_{u=v}^{0} 2a(u)du\,dv, & x < 0 \end{cases}$$

và với mỗi $k \geq 2$

$$f_k(x) = \begin{cases} \int_{v=0}^{x}\frac{1}{b(v)}\int_{u=0}^{v} 2a(u)f_{k-1}(u)du\,dv, & x \geq 0 \\ \int_{v=x}^{0}\frac{1}{b(v)}\int_{u=v}^{0} 2a(u)f_{k-1}(u)du\,dv, & x < 0. \end{cases}$$

Khi đó hai mệnh đề sau luôn thỏa

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f_k(x)}{x^{2k}} = \frac{2^k}{(2k)!}\sigma^{-2k} = c_k \qquad (2.3)$$

và hơn nữa

$$\mathbb{E}\{f_k(X_t)\} = \frac{t^k}{k!}, \forall t \geq 0 \qquad (2.4)$$

với mỗi $k \geq 1$.

*Chứng minh* (2.3). Xét trường hợp $x \geq 0$. Khi đó

$$\frac{f_1(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}\int_{v=0}^{x}\frac{1}{b(v)}\int_{u=0}^{v}2a(u)du\,dv \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{\alpha}{\beta} = \sigma^{-2}.$$

Giả sử (2.3) đúng với $k$, thì nó cũng đúng cho $k+1$, tức là

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_{k+1}(x)}{x^{2k+2}} = \frac{2^{k+1}}{(2k+2)!}\sigma^{-2k-2}.$$

Tính giới hạn

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_{k+1}(x)}{x^{2k+2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{2k+2}}\int_{v=0}^{x}\frac{1}{b(v)}\int_{u=0}^{v}2a(u)f_k(u)du\,dv$$

$$= \frac{2^{k+1}}{(2k)!}\sigma^{-2k}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{2k+2}}\int_{v=0}^{x}\frac{1}{b(v)}\int_{u=0}^{v}a(u)u^{2k}du\,dv$$

$$= \frac{2^{k+1}}{(2k)!}\sigma^{-2k}\frac{\sigma^{-2}}{(2k+1)(2k+2)}$$

$$= \frac{2^{k+1}}{(2k+2)!}\sigma^{-2k-2}.$$

Trường hợp $x < 0$, tương tự như trên. Như vậy (2.3) đã được chứng minh.

*Chứng minh* (2.4). Vì $f_k \in C^2$ và quá trình $f_k(X_t)$ thỏa mãn phương trình vi phân ngẫu nhiên nên theo công thức Ito thì

$$\begin{aligned} df_k(X_t) &= f_k'(X_t)\sigma(X_t)dB_t \\ &\quad + \left[f_k'(X_t)\mu(X_t) + \frac{1}{2}f_k''(X_t)\sigma^2(X_t)\right]dt \\ &= f_k'(X_t)\sigma(X_t)dB_t + f_{k-1}(X_t)dt \end{aligned}$$

với mỗi $k \geq 1$, trong đó $f_0 \equiv 1$.

Từ đó

$$f_k(X_t) = f_k(X_0) + \int_0^t f_k'(X_t)\sigma(X_t)dB_s + \int_0^t f_{k-1}(X_s)ds.$$

Lấy kỳ vọng hai vế, với mỗi $k \geq 1$, thì $\mathbb{E}\{f_k(X_t)\} = \mathbb{E}\left\{\int_0^t f_{k-1}(X_s)ds\right\}$.

Khi $k = 1$, $\mathbb{E}\{f_1(X_t)\} = \mathbb{E}\left\{\int_0^t f_0(X_s)ds\right\} = \int_0^t ds = t$.

Giả sử (2.4) đúng với $k$, thì nó cũng đúng cho $k+1$, tức là $\mathbb{E}\{f_{k+1}(X_t)\} = \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}, \forall t \geq 0$.

Lấy kỳ vọng

$$\mathbb{E}\{f_{k+1}(X_t)\} = \mathbb{E}\left\{\int_0^t f_k(X_s)ds\right\} =$$

$$\int_0^t \mathbb{E}\{f_k(X_s)\}ds = \frac{1}{k!}\int_0^t s^k ds = \frac{1}{k!}\times\frac{t^{k+1}}{k+1} = \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Như vậy (2.3) đã được chứng minh.

Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) > 0$ sao cho $\forall |x| > M$ thì $\left|\frac{x^{2k}}{f_k(x)} - \frac{1}{c_k}\right| < \varepsilon$.

Phân tích $\Omega = \{|X_t| \leq M\} \cup \{|X_t| > M\}$, ta có

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{E}\left\{\left(\frac{X_t}{\sqrt{t}}\right)^{2k}\right\} - \frac{1}{k!\,c_k}\right| &= \left|\mathbb{E}\left\{\left(\frac{X_t}{\sqrt{t}}\right)^{2k} - \frac{f_k(X_t)}{t^k c_k}\right\}\right| \\ &\leq \mathbb{E}\left\{\left|\frac{X_t^{2k}}{f_k(X_t)} - \frac{1}{c_k}\right|\frac{f_k(X_t)}{t^k}1_{\{|X_t|>M\}}\right\} \\ &\quad + \frac{1}{t^k}\mathbb{E}\left\{\left|X_t^{2k} - \frac{1}{c_k}f_k(X_t)\right|1_{\{|X_t|\leq M\}}\right\}. \end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\left|\frac{X_t^{2k}}{f_k(X_t)} - \frac{1}{c_k}\right|\frac{f_k(X_t)}{t^k}1_{\{|X_t|>M\}}\right\} &< \varepsilon\,\mathbb{E}\left\{\frac{f_k(X_t)}{t^k}\right\} \\ &= \frac{\varepsilon}{k!} \leq \varepsilon \quad , \qquad \forall k \geq 1 \end{aligned}$$

và

$$\frac{1}{t^k}\mathbb{E}\left\{\left|X_t^{2k} - \frac{1}{c_k}f_k(X_t)\right|1_{\{|X_t|\leq M\}}\right\} \xrightarrow{t\to+\infty} 0.$$

Như vậy Mệnh đề 2.1 đã được chứng minh. □

**Mệnh đề 2.2** *Với quá trình khếch tán đã cho* $\lim_{t\to+\infty}\mathbb{E}\left\{\left(\frac{X_t}{\sqrt{t}}\right)^{2k-1}\right\} = 0$

*với mỗi* $k \geq 1$.

*Chứng minh.* Xét một chuỗi các hàm số $g_k$, xác định trên $\mathbb{R}$, sao cho

$$\begin{cases} Lg_k \equiv g_{k-1},\ k \geq 1 \\ g_0 = 0 \\ g_k(0) = 0 \quad ,\ k \geq 1 \end{cases}.$$

Khi $k = 1$

$$Lg_1(x) = 0\ ,\forall x \in \mathbb{R}$$

dẫn đến

$$g_1(x) = \begin{cases} \int_{v=0}^{x}\frac{1}{b(v)}dv\,,\ x \geq 0 \\ \int_{v=x}^{0}\frac{1}{b(v)}dv\,,\ x < 0 \end{cases}.$$

Và với mỗi $k \geq 2$

$$g_k(x) = \begin{cases} \int_{v=0}^{x} \frac{1}{b(v)} \int_{u=0}^{v} 2a(u) g_{k-1}(u) du\, dv\,, & x \geq 0 \\ \int_{v=x}^{0} \frac{1}{b(v)} \int_{u=v}^{0} 2a(u) g_{k-1}(u) du\, dv\,, & x < 0 \end{cases}.$$

Tương tự như trên thì giới hạn sau cũng đúng

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{g_k(x)}{x^{2k-1}} = \frac{2^{k-1}}{\beta(2k-1)!} \sigma^{-2k+2} = d_k \qquad (2.5)$$

và hơn nữa $\mathbb{E}\{g_k(X_t)\} = 0\,, \forall t \geq 0.$ (2.6)

Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) > 0$ sao cho $\forall |x| > M$ thì $\left|\frac{x^{2k-1}}{g_k(x)} - \frac{1}{d_k}\right| < \varepsilon$.

Phân tích $\Omega = \{|X_t| \leq M\} \cup \{|X_t| > M\}$, thì

$$\left|\mathbb{E}\left\{\left(\frac{X_t}{\sqrt{t}}\right)^{2k-1}\right\} - 0\right| = \left|\mathbb{E}\left\{\left(\frac{X_t}{\sqrt{t}}\right)^{2k-1} - \frac{g_k(X_t)}{(\sqrt{t})^{2k-1}} \times \frac{1}{d_k}\right\}\right| \leq \mathbb{E}\left\{\left|\frac{X_t^{2k-1}}{g_k(X_t)} - \frac{1}{d_k}\right| \frac{g_k(X_t)}{(\sqrt{t})^{2k-1}} 1_{\{|X_t|>M\}}\right\}$$

$$+ \frac{1}{(\sqrt{t})^{2k-1}} \mathbb{E}\left\{\left|X_t^{2k-1} - \frac{1}{d_k} g_k(X_t)\right| 1_{\{|X_t| \leq M\}}\right\}.$$

Khi đó

$$\mathbb{E}\left\{\left|\frac{X_t^{2k-1}}{g_k(X_t)} - \frac{1}{d_k}\right| \frac{g_k(X_t)}{(\sqrt{t})^{2k-1}} 1_{\{|X_t|>M\}}\right\} < \varepsilon, \forall k \geq 1$$

và

$$\frac{1}{(\sqrt{t})^{2k-1}} \mathbb{E}\left\{\left|X_t^{2k-1} - \frac{1}{d_k} g_k(X_t)\right| 1_{\{|X_t| \leq M\}}\right\} \xrightarrow{t \to +\infty} 0\,.$$

Như vậy, Mệnh đề 2.2 đã được chứng minh. □

## 4 KẾT LUẬN

Bài báo đã chứng minh định lý giới hạn trung tâm cho quá trình khuếch tán trên không gian trạng thái $\mathbb{R}$ thông qua việc sử dụng phương pháp moment. Ngoài ra, điểm mấu chốt trong bài toán này là có thể giải được phương trình Poisson tương ứng với toán tử cực vi $L$ . Phương pháp này được kỳ vọng có thể được áp dụng cho các bài toán khác có liên quan.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


Billingsley, P., 1995. Probability and measure, Third Edition. Wiley. New York, 593 pages.

Chuong, L.H., 2014. A quenched central limit theorem for reversible random walk in random environment on Z. Journal of Applied Probability. 51(4): 1051-1064.

Depauw, J. and Derrien, J. M., 2009. Variance limite d'une marche aléatoire réversible en milieu aléatoire sur Z. Comptes Rendus Mathematique. 347(7-8): 401–406.

Papanicolaou, G. C., and Varadhan, S. R. S., 1982. Diffusions with random coefficients. In: Kallianpur, G., Krishnaiah, P. R. and Ghosh, J.K. (Eds.), Statistics and Probability: Essays in Honor of C. R. Rao, North-Holland, Amsterdam, pp. 547–552.